数学的分形与艺术的分形
——分形几何及其在艺术设计中的应用

卢　杰　王蔚蔚

（南昌大学工业设计系，江西　南昌　330031）

wvvparma@ yahoo. com. cn

摘　要：分形几何学是几何学的一个极为年轻的分支，它以前所未有的视角颠覆了欧几里德几何学几千年来对世界固定不变的描述，而分形几何更是以其精美绝伦的几何图案征服了无数的艺术家和设计师。它在以一种更为精确的几何学方法描述这个世界的同时，也使艺术家和设计师看到了从现实世界中抽象出来的真实而复杂的美，为各种设计形式提供了突破性的思路，从而开始被广泛应用于各种艺术作品和设计作品中，架起了沟通艺术与科学之间的桥梁。

关键词：分形；艺术设计；自相似

Abstract: Fractal geometry is a completely young branch of geometry which overthrew the stable description to the world of the traditional Euclidean geometry in thousands years with an unprecedented perspective. Moreover, fractal geometry has conquered countless artists and designers by its patterns of divine beauty. It describes the world with a more precise geometry method and made the artists and designers realized the abstract beauty of truth and complexity from the real world at the same time. It offered each design a new idea of breakthrough and was widely utilized in various arts and design works by constructing a bridge to communicate with art and science.

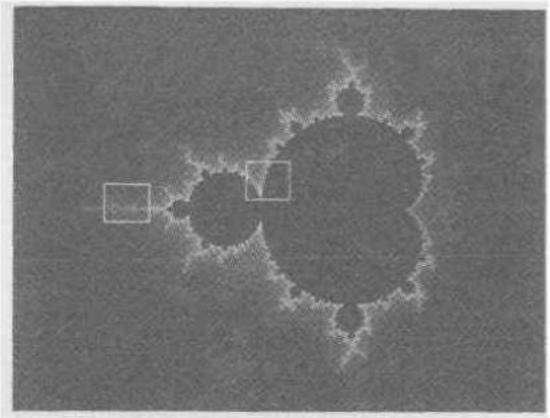
Key words: fractal; art and design; self-similarity

在各种设计形式中，传统的几何学，即欧几里德几何学的影响是无处不在的。从严格的对称到黄金分割律的应用，无不显示出一种严格的美的秩序，这种秩序同时也反映在了我们日常的生活中。我们日常生活中的一切设计，从视觉媒体到产品造型，从建筑设计到城市规划，无不都是按照这种美的秩序来构建的。然而随着科学探索的深入和审美观念的发展，这种延续千年的形式之美已无法满足人们对于审美和造物的新的需求。毕竟，欧氏几何的缺陷就在于只能对简单的图形图案进行精确的描绘，而不能描述人们生活中的这个自然，不能精确的描绘自然界中的图案。而诞生于20世纪70年代的分形几何学则为我们精确的描绘自然界中的万事万物提供了新的视角，其纷繁复杂而又井然有序的几何图案更是成为了艺术家和设计师们进行设计创作时的灵感来源和新的构思。

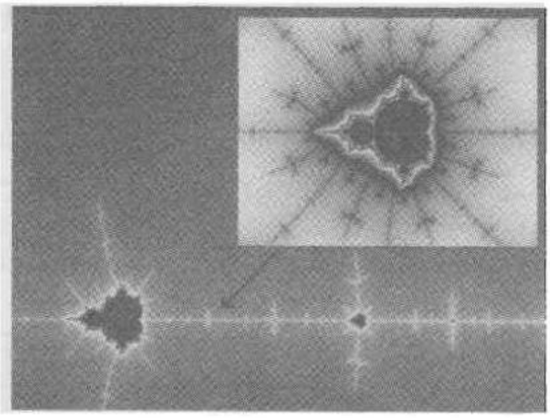
1　分形几何概况

在我们所生活的这个现实世界中，往往不存在欧氏几何中的那种规则的几何体，而更多的是“不规则”的事物。例如级级分叉的大树、支流汇干流的复杂水系、人体内交错繁杂的神经细胞和血管分布、蜿蜒曲折的海岸线等。传统的欧氏几何对这些事物的分析往往是无从下手的。但如果仔细观察，往往会发现这些事物也具有局部与整体的相似性。也就是说，它们不存在传统几何学中的那种理想化的17种对称关系，它们所具有的是一种新的对称，即局部与整体的相似对称。

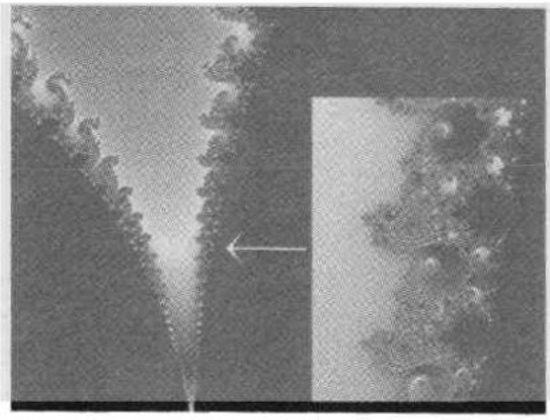
20世纪70年代，美籍法国数学家B. B. Mandelbrot提出了分形学的思想，即研究无限复杂但又具有一定意义下的自相似的图形和结构的几何学。1980年，Mandelbrot在复平面上对简单的式子 $Z<-Z^2+C$ 进行迭代，产生出了一个出人意料的具有无限复杂的和具有精细结构的图形（图1），即Mandelbrot集合图形。计算机在不受限制的情况下，可以无限放大其边界。当你放大某个局部，就会看到一个和原来相似，但又不完全相同的结构。用数学方法对放大区域进行着色处理，这些区域就变成了一幅精美的艺术图案。分形的自相似性揭示了一种新的对称性：局部与整体的对称，即系统中的每一元素都反映和含有整个系统的性质和信息[1]。正如生物体的每一个细胞都带有生物个体全部的遗传信息，具有发育成另一个生物个体的全能性一样。



a）Mandelbrot 集合图案，$Z<-Z^2+C$



b）Mandelbrot 集局部放大图案（1）



c）Mandelbrot 集局部放大图案（2）

图 1　Mandelbrot 集合图形

另一方面，其图形的边界具有无限复杂和精细的结构。正如蜿蜒曲折的海岸线，无论怎样放大局部，总是曲折而不光滑的，即连续不可微分。这种情况下，欧氏几何早已不再适用。利用坐标系对简单曲线进行定性分析的笛卡儿解析几何也无能为力，解决曲线的定性定量描述，可表现具有特征长度，可微分的，平滑的复杂形状的牛顿微分几何也只能望其项背。此时，只有分形几何才能向这些传统的几何学发出挑战，解释宇宙中由一种出人意料的方式构成的自相似的结构。

2　分形艺术之美

上述 Mandelbrot 集合图案产生的复杂有序的美感已让人初步体会到了科学之美，如果能将其应用在艺术和设计创作上，必然能带来一种革命性的视觉感受，更何况用数学方法为图案进行上色处理以后，该图案就已经具有了丰富多彩的审美特性。

例如，图 2 就是一种简单的分形图案——雪花曲线或称科赫曲线，由瑞典数学家 Koch 于 1906 年发现。这个图案运用的就是最简单的迭代：把等边三角形中的每条边三等分，再以每条边中间的线段为底边，建立一个新的小的等边三角形，再对所产生的三个新的三角形采用上述方式再进行等分，构建，当重复到一定程度时，我们就能看到产生了一个美丽的雪花图案。理论上，这个原初的三角形是可以无限的划分下去的，它的每一个局部都是一个小的三角形，小的三角形上还有更小的三角形，这就是自相似。这样无限的划分下去，我们可以发现一个奇妙的现象，即图案的边长趋近无穷，而图案本身却始终不会超过原初三角形的外接圆。

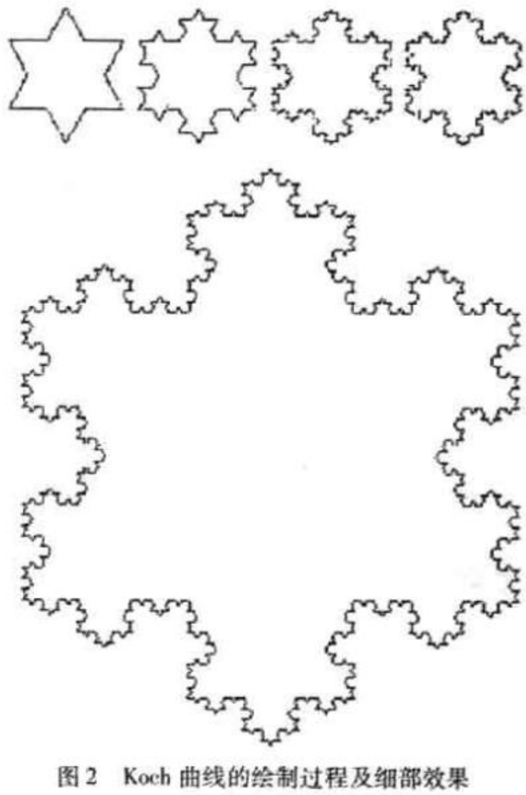


图 2　Koch 曲线的绘制过程及细部效果

具有分形结构的图像具有一种天然的美感，这不仅因为分形几何是描述大自然最好的几何学，而且因为分形结构介于混乱和有序之间，正好满足了人类的审美心理需求[2]。分形理论崇尚混乱中的秩

序，统一中的丰富，正像贡布里希所说，“审美快感来自对某种介于乏味和杂乱之间的图案的观赏。单调的图案难于吸引人们的注意力，过于复杂的图案则会使我们的知觉系统负荷过重而停止对它进行观赏。”分形图形的结构虽然复杂，但却杂而不乱，它有内在的秩序和自相似的结构，即局部与整体的对称统一。这种对称摒弃了欧几里德几何形的对称给人带来的呆板感觉，整个画面从平衡中寻找着动势，在深层次上又有着普遍的对应与制约[3]。

下面图 3、4、5 分别是 Julia、Newton、Nova 集合的分形图案，单从审美的角度看待这些纯数学的图案，它们已经远远的超出了原有的学科归属范围，已经就是一件件完美的艺术作品。撇开它们的数学含义，我们就已经可以在这些图案中看出其所体现的许许多多的传统美学标准，如平衡、和谐、对称等，但更多的是超越这些标准的新的表现，比如，它的平衡是一种动态的平衡，一种画面各个部分在变化过程中相互制约的平衡。

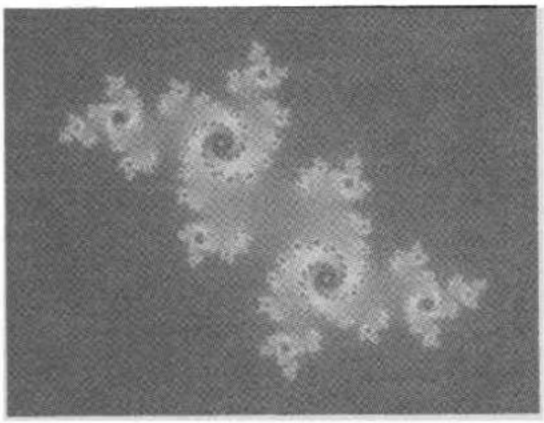


图3　Julia 集合

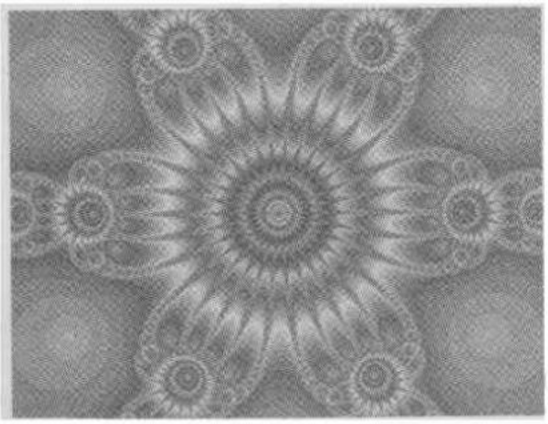


图4　Newton 集合

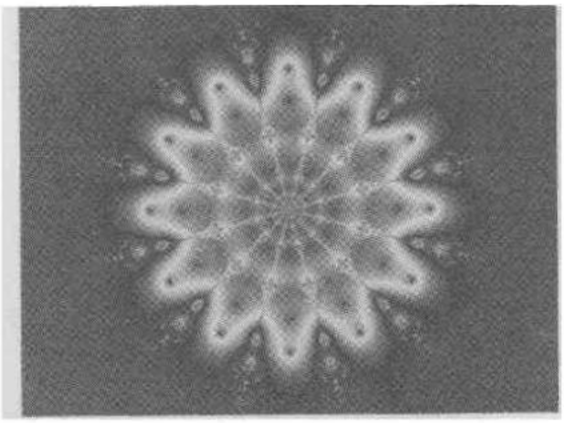


图5　Nova 集合

分形图案的和谐是一种数学上的和谐，而最特别的就是它的局部与整体的对称。这种类似于无穷嵌套结构的大局部与小局部的对称，给画面带来了极大的丰富性，仿佛蕴藏着无穷的创造力，使欣赏者不能轻而易举地看出里面所有的内涵。这正如法国印象派大师雷诺阿所说的：“一览无余则不成艺术”。和许多伟大的艺术作品一样，分形图案也都具有这样的特征。

所以说，分形决不是传统形式美的翻版，它是对传统形式美的发展、突破和超越。总的说来，分形之美主要体现在以下三个方面：

1）对传统对称形式的突破。

2）对自然界中不规则事物的数学抽象。

3）精细的层层嵌套的体系给观赏者以前所未有的新的视觉感受。

3　分形几何在设计中的运用

分形几何对于当代设计有着崭新的指导意义。它能够应用在现代设计中的各个领域，在视觉感受等诸多方面为当代设计带来革命性的变革。其实，在古往今来的各种设计造物之中，有的设计人类就在其中无意的应用到了分形的思想，也就是那种自相似的嵌套结构。

例如，始建于公元 13 世纪的科隆大教堂（图 6），其外形就无意中暗含了分形的思想。在它的正立面上，四层浮雕似的尖顶窗饰在它们彼此之间以及双尖塔的整体造型之间均形成了明显的自相似的叠套。科隆大教堂具有后哥特式特有的非常丰富而精致的建筑装饰，在建筑物所有的细部上都覆盖着有流动感的石质透空花纹，其高耸的双尖塔的外观轮廓并非是光滑的曲线，而是由像软体动物的棘一样的连续排列的小突触构成，看上去也具有分形图案的特点[4]。

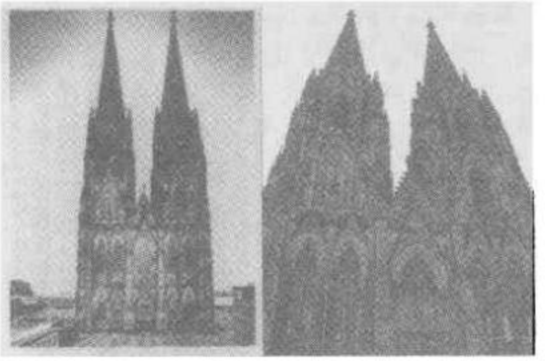


图6 德国科隆大教堂正立面

再如，建于19世纪的巴黎埃菲尔铁塔的细部钢构，也具有一定的分形图案的效果。其分形模式与一种Sierpinski三角形非常相似（图7）。Sierpinski三角和Koch雪花一样，也是一种经过简单迭代所产生的美丽的几何图案，也具有严格的自相似性。其绘制过程是不断地连接等边三角形的三个中点、挖去中间新的小三角形再次进行新的分割。随着分割的不断进行，我们会发现一个类似于悖论的有趣现象，即三角形的总面积→0，总边长长度→+∞（图8）。这种结构应用在工程方面，能起到省材省料，强度高的效果。而埃菲尔铁塔仿佛就是立体的Sierpinski三角的变形。

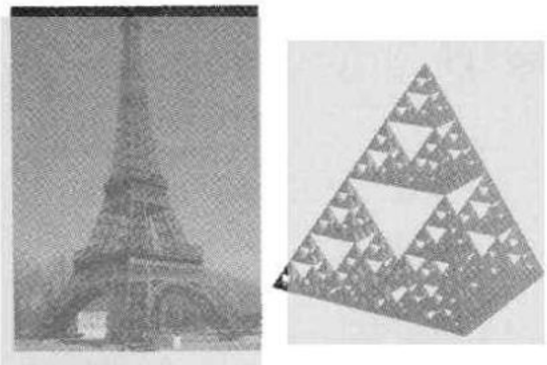


图7 埃菲尔铁塔和Sierpinski三角的结构对比

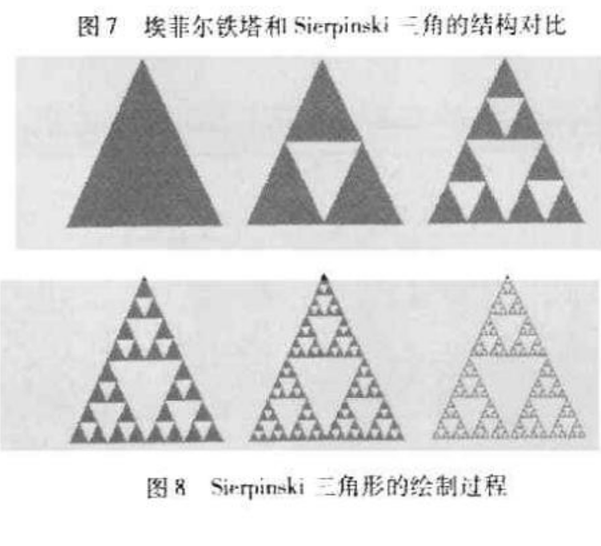


图8 Sierpinski三角形的绘制过程

在平面设计领域，分形图案更是有其用武之地，这就必须用上专门的分形软件。在专门的分形艺术软件出现之前，各种图像处理软件都是以传统的计算机绘图方法为基础来描述图形的，只能绘制表面平滑，形状规则的几何图案，都是欧氏几何的产物。欧氏几何最大的缺陷就在于，不能模拟人们生活中的这个自然，不能精确描述自然之中的图案。而这些图案又为设计者所需，所以通常的做法是通过数码相机和扫描仪将这些图案输入电脑。但由于受到各种因素的制约，设计者不能在设计时做到随心所欲。

所以，在利用图形图像处理软件以粘贴、合成和艺术加工为主要制作手段的同时，如果设计师能借用分形艺术软件来绘制图形，不但会为平面设计师们提供一种全新的设计手法，而且使设计师有更大的想象余地和发挥空间如图9、10、11所示。而且，分形的图案是变幻莫测，色彩绚烂而美丽的，将其应用到视觉传达设计中去除具有实用性外，还有很好的艺术价值，吸引更多的消费者。

图9 分形艺术作品——奔月，作者苑玉峰

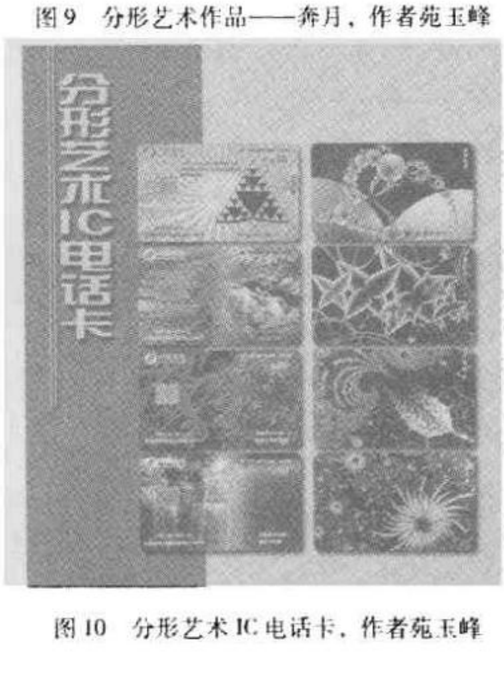


图10 分形艺术IC电话卡，作者苑玉峰

图11　利用分形思想制作的广告作品

最后，由于分形图案的无限相似性和无限细致性，如果将分形图案应用到包装设计中去，将能起到很好的防伪效果。因为一幅分形图案是由分形软件根据唯一的数学算法而生成的，其图案一旦确定，就很难甚至不可能用原稿扫描的方法进行复制。只要其图案的算法不泄漏，那么这个包装的图案就是唯一的，从而达到了防伪的目的[5]。

4　后记

分形几何学是20世纪的伟大科学发现，同时也可以说它是一个伟大的艺术发现。它为人们描绘错综复杂的现实世界提供了可能。分形图案的错综、复杂、绚丽和富于表现，不仅唤起了科学世界的神奇创造力，同时也让人感受到了艺术世界魔幻般的感染力。科学依赖于分析，艺术凭借直觉，优秀的分形图案本身就是科学理论和艺术感受的完美融合。分形图案之所以能给人以极大的艺术震撼，是因为它体现着自然的数理内涵与人类审美需求的和谐与统一。

分形使人们觉悟到了科学与艺术的融合，科学与艺术审美上的统一，它使昨日枯燥的数学不再仅仅是抽象的原理，而是具体的感受；不再仅仅是揭示一类存在，而是一种艺术创作。总之，是分形几何又搭建起了一座沟通科学与艺术的桥梁。

参考文献

[1] 高雪芬，高兴媛．浅谈几何学在艺术设计方面的应用［J］．大学数学，2005，21（2）：2.

[2] 孙博文．几何学是一种艺术语言［J］．分形频道网站（www. fractal. cn）2006，1.

[3] 王家民，郭亚旎．分形艺术图形的审美价值及其设计应用［J］．装饰，2006，157（5）：114.

[4] 林小松，吴越．分形美学——超越传统形式美的全新美学［J］．新建筑，2004，3：71.

[5] 钟云飞．分形艺术在包装上的应用研究［J］．包装工程，2003，24（2）：69.