

# 费尔马猜想的古往今来

李心灿

(北京航空航天大学 应用数理系)

**摘 要** 介绍了费尔马猜想. 梗概地论述了 300 多年来数学家和数学爱好者为证明费尔马猜想所产生的可歌可泣的事迹, 评介了怀尔斯对费尔马猜想的证明.

**关键词** 费尔马最后定理; 椭圆曲线; 数学问题; 半稳定椭圆曲线

**分类号** O156; O11

## 1 引 言

1993 年 6 月, 在英国剑桥大学牛顿数学研究所举行了一个名叫“岩泽健吉(Iwasawa)理论, 模形式和  $P$ -adic 表示”的学术会议. 会上年仅 40 岁的英国数学家、现任美国普林斯顿大学数学系教授怀尔斯(Wiles Andrew)应邀作了一系列演讲, 演讲的题目是“椭圆曲线, 模形式和伽罗瓦表示”. 从这个题目, 听众很难想到, 他要把演讲引向那里. 然而在 6 月 23 日他的最后一个演讲快结束时, 他推出了“谷山-韦伊-志村猜想”对于半稳定的椭圆曲线来说成立. 接着他平静地宣布: “我证明了费尔马猜想.”

这一振奋人心的消息不胫而走, 震动了世界数学界, 例如, 美国南加州大学的阿德尔曼(Adelman Leonard)博士说: “这是数学中最激动人心的事, 嘿, 可能是从来没有过的.” 美国哈佛大学的数学家马祖尔(Mazur Barry)博士说: “这一次证明了的东西远远超过费尔马猜想. 一个人可能找到一个问题的证明, 尽管这问题多么著名, 但这个证明可能没有什么深远意义. 但是这一次相反, 这次产生了一种新技巧, 它是很有用的, 用它还可以证明多得多的东西.” 非数学界的不少人士也纷纷打听费尔马猜想的渊源与怀尔斯证明费尔马猜想所使用的方法. 成千个电话、电子信件和传真如大雨倾盆淋到普林斯顿大学数学系, 该系系主任科申(Kochen Simon)博士说: “数学归根结蒂是很少几千个专业行家的事情, 外界对它毫无兴趣, 但是关于怀尔斯的证明, 似乎人类的精神还活着. 这就象在听故世的贝多芬的一首四重奏, 这好象他们都还活着, 一切都发生在我们生活中.” 我国的《光明日报》、《文汇报》、《中国科学报》、《科技日报》等报刊都对此事作了报道.

本文试图对费尔马猜想的古往今来, 作一梗概论述, 使读者看到数学中的一些重要问题是如何产生和发展、解决的艰辛、曲折过程, 并品尝到数学所具有的某些独特风味及其极富魅力的论证性.

## 2 费尔马及费尔马猜想

费尔马(Fermat Pierre de)被誉为“业余数学家之王”. 他 1601 年 8 月 20 日生于法国南部

收稿日期: 1994-04-12 作者 男 60 岁 教授 100083 北京

图卢兹附近的博蒙特,其祖父、父亲、叔父都从事商业,他的父亲多米尼克(Dominique Fermat)还是当地第二执政官并经历了一个生意兴隆的皮革商行,费尔马的母亲克拉丽·德·朗(Claire de Long)曾在长袍贵族中任职。

费尔马的童年和少年时代是在博蒙特度过的,在家乡上完中学后,他进入了图卢兹大学。17世纪20年代的后期他曾在波尔多度过了相当长的一段时间,就在这一时期他对数学发生了兴趣,并深入地研究过法国数学家韦达(Vieta Francois)的著作。费尔马于1631年5月1日获得奥尔良大学民法学士学位。

费尔马以律师为职业。曾任图卢兹议会的议员,并享有长袍贵族的特权。他不但有丰富的法律知识,而且以严格、清廉为人称颂,他还是一个博览群籍、识多见广的学者。虽然数学只不过是他的业余爱好,由于他精通法语、意大利语、西班牙语、拉丁语、希腊语,从而使他不仅能精心研究韦达的著作,而且能深入钻研那些古典的著名数学著作。例如,阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius)、丢番图(Diophantus)、帕普斯(Pappus)等人的论著,并对数学作出了第一流的贡献:他在研究几何的过程中先于笛卡儿(Descartes Rene du Perron)发现了解析几何的原理;他是微积分的杰出先驱者;他和帕斯卡(Pascal Blaise)共同开创了概率论的早期研究;他是近代数论的开拓者。另外,他还为物理学的一个重要分支——波动光学奠定了基础。

费尔马性情谦抑,好静成癖。他对数学的许多研究成果,往往以没有给出证明的断言写在他阅读过的书籍的边缘或空白处,或者写在给朋友的一页或几页的信笺中,也有一些散放在旧纸堆里的,他从未想出版,而且固执地拒绝编辑他的文章或以他的名字发表。他曾多次阻止过别人把他的结果付印。他对自己已完成的工作不再感兴趣,所以常常很随便地将自己写的文章送给朋友而不留底稿。费尔马在生前也发表过几篇文章,但都是在他要求匿名的条件下发表的,并且要求勿需作详细明了的解释。直到他去世后,后人(其中包括他的大儿子克莱门特·塞缪尔(Clement Samule))才把他的成果汇集成书,共两卷,先后于1670年和1679年在图卢兹出版。第一卷有丢番图的算术,带有校订和注释;第二卷包括抛物形求积法,极大极小及重心的论述和各类问题的解答。还有球切面、曲线求长的论述,另外就是他和笛卡儿、帕斯卡、罗伯瓦(Roberval Gilles Personne de)、梅森(Mersenne Marin)、惠更斯(Huygens Christiaan)等人的通信录。这部书后来罕见于世,直到1853年布拉兴(Brassinne)重新加以注释在巴黎出版。

费尔马对解析几何、微积分和概率论的开创都作出了重要贡献。但最能显示出他的数学才华且对后人影响最大的,是他在数论方面的工作。在费尔马以前,希腊人也曾研究过数的性质,我们可以从欧几里得(Euclid)、尼科马霍斯(Nicomachus)、赛翁(Theon)、丢番图等人的著作中找到一些关于数的性质的论述,但是很不系统。这门学科也曾强烈地吸引过印度人,但是直到费尔马仔细阅读了丢番图的译本而把注意力转移到这方面之前,数论始终不曾有过重大的进展。费尔马认为数论被忽视了。他曾抱怨说几乎没有什么人提出或懂得数论问题,并说:“这是不是由于迄今为止,人们都用几何的观点而不用算术观点来处理算术的缘故?”他认为甚至连丢番图也颇受几何观点的束缚。费尔马相信算术有它自己的特殊园地:整数论。

费尔马对数论的研究是从阅读丢番图《算术》这部书开始的。《算术》是数学史上一部重要著作,丢番图的特点是使问题的求解脱离几何形式,在希腊数学中独树一帜。《算术》曾被文艺复兴时代的数学家译成许多译本。费尔马深入钻研了由法国数学家巴歇(Bachet de Méiriac Claude-Caspar, 1635年当选为法国科学院士)1621年校订的并由希腊文译成拉丁文出版的丢

番图的《算术》(其中也收入了巴歇自己在数论和丢番图分析上的研究成果). 费尔马对数论的大部分贡献都批注在这本书页的边缘和空白处. 1637 年左右, 费尔马在《算术》第二卷第八命题——“将一个平方数分为两个平方数之和”的旁边写道: “另一方面, 不可能有一个数的立方表成另外两个立方数之和, 一个数的四次方表成另外两个四次方数之和. 一般来说, 不可能有一个更高的方幂表成另外两个相应的方幂之和. 我对此命题给了一个真正的非常奇妙的证明, 只是此处的空白太小了写不下.” 这就是数学史上著名的费尔马猜想. 这个猜想可以用现代术语简述如下:

不可能有满足

$$x^n + y^n = z^n \quad xyz \neq 0 \quad n > 2$$

的正整数  $x, y, z, n$  存在.

费尔马提出了数论方面许多引人注目的、富有洞察力的论断, 这些论断到 19 世纪中期, 除了上述这个猜想之外, 所有其它费尔马问题均已被数学家们相继解决, 因此上述费尔马猜想又被称为费尔马最后定理, 或称为费尔马大定理.

### 3 可歌可泣的事迹

费尔马逝世后, 人们一直未找到他对这个猜想的证明, 而费尔马上述猜想的叙述是如此简单易懂, 给人以容易证明的假象, 加上费尔马还说他已经“给出了一个真正的非常奇妙的证明”, 于是激起了许多职业数学家和更多的业余数学爱好者致力于它的证明.

布鲁塞尔科学院和法国科学院曾设奖金徵求证明. 1908 年德国一位对数学爱好的富翁沃尔夫斯克( Wolskehl F Paul) 在德国哥廷根皇家科学会悬赏 10 万马克徵求证明, 有效期为 1908~2008 年这 100 百年. 但直到 1993 年 6 月 23 日怀尔斯宣布他证明了费尔马猜想之前, 不知有多少位职业数学家和无数的数学爱好者为之而付出了毕生的精力, 但依然没有得到完全的证明, 并产生了不少可歌可泣的故事. 从而在数学史上也留下了一串深深的足迹.

#### 3.1 从丢番图到欧拉

约在公元前 1100 年我国的商高就已经知道不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2$$

至少有一组正整数解:  $x=3, y=4, z=5$ .

希腊的丢番图(活动于公元 250~275 年)求得一般的解答:  $x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2$ , 其中  $m, n(m>n)$  是任意正整数.

费尔马猜想是说: “如果指数  $n>2, x^n+y^n=z^n$  没有正整数解”.

对这个猜想还可以简化一下. 如果结论对于某一个  $n$  值是真的, 那么对于  $n$  的任何倍数  $mn$  也是真的. 因为假设

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

没有正整数解. 将

$$x^{mn} + y^{mn} = z^{mn} \quad (2)$$

写成

$$(x^m)^n + (y^m)^n = (z^m)^n \quad (3)$$

如果式(2)有正整数解  $x, y, z$ , 那么正整数  $x^m, y^m, z^m$  就应满足式(3), 这与式(1)无正整数解矛盾.

又任何一个大于2的正整数如果不被4整除,就一定被某一个奇素数整除.因此只要证明 $n=4$ 时以及 $n$ 是任一个奇素数 $p$ 时费尔马猜想成立,那么对任何的正整数 $n$ 费尔马猜想就成立.大家知道素数比正整数要少得多,例如1至500以内的素数共有95个,不足500正整数的 $1/5$ .但素数的个数也是无限的.

值得指出的,早在费尔马提出上述命题之前,人们就对如下一个几何问题产生了兴趣:“是否能构造一个具有整数边的正立方体,它的体积等于两个较小的具有整数边的正立方体的体积之和?”这个问题可以转变为代数问题:“代数式 $x^3+y^3=z^3$ 是否有正整数解?”在公元972年阿拉伯人阿尔柯但弟(Alkhodjadi)就给出了 $x^3+y^3=z^3$ 无正整数解的一个“证明”,但他的“证明”有缺陷.

费尔马在给法国数学家卡尔卡维(Carcavi Pierre de,约1663~1683年,费尔马的许多初稿都是通过他的保存得以流传的.)的一封信中说他已用“无穷下推法”证明了 $x^n+y^n=z^n$ ,当 $n=4$ 的情形时无正整数解,但未给出全部证明细节.然而法国数学家、物理学家、天文学家费雷尼克尔(Frenicle de Bessy Bernard)利用费尔马的少量提示,于1676年给出了 $n=4$ 这一情形的证明,并发表在他死后出版的《论直角三角形数》一书中.

1729年德国-俄国数学家哥德巴赫(Goldbach Christian)给瑞士著名数学家欧拉(Euler Leonard)写了一封信,信中提到了费尔马在丢番图的《算术》这部书的页边扎记中提出的一些猜想.当时年仅22岁的欧拉就开始认真研究数论,他不但解决了费尔马提出的不少问题,并使数论从五花八门的事实与结果的堆积转变为属于数学核心的有生机的一个领域.1770年,欧拉用费尔马的“无穷下推法”给过 $n=3$ 的费尔马猜想的一个不完整的证明,但用欧拉的技巧不但可以给出 $n=3$ 的费尔马猜想的一个完整证明,而且欧拉的技巧具有很大的启发性,对后来更深入研究费尔马猜想时成为一个中心课题.欧拉还研究过费尔马写在丢番图《算术》第六卷页边上的一个问题:“我们能不能找到一个平方不等于25的数,把它加上2就成为立方数?”用现代的术语来说就是: $x^3=y^2+2$ 的整数解组是不是只有 $(x,y)=(3,\pm 5)$ .为了证明这个论断,欧拉使用了形如 $a+b\sqrt{-2}$ 的数,其中 $a$ 和 $b$ 为整数,欧拉的证明如下:

$$x^3 = y^2 + 2 = (y + \sqrt{-2})(y - \sqrt{-2})$$

可以证明 $y + \sqrt{-2}$ 和 $y - \sqrt{-2}$ 是互素的,因为它们的乘积是一个立方数,所以它们每一个都是立方数.于是

$$\begin{aligned} y + \sqrt{-2} &= (p + q\sqrt{-2})^3 = p^3 - 6pq^2 + (3pq^2 - 2q^3)\sqrt{-2} \\ \Rightarrow 1 &= 3p^2q - 2q^3 = q(3p^2 - 2q^2) \\ \Rightarrow p &= \pm 1 \quad q = 1 \\ \Rightarrow y &= p^3 - 6pq^2 = \pm 5 \quad x = 3 \end{aligned}$$

这个证明很漂亮,然而不完整,因为当时人们还不知道形如 $a+b\sqrt{-2}$ 的数有唯一因子分解定理,甚至还不知道形如 $a+b\sqrt{-2}$ 的数中素数是什么.我们之所以举这个例子,是因为它在以下三方面是重要的:

首先,它使我们认识到,除了费尔马猜想之外还有许多丢番图方程,而我们最希望的是找到一种方法能同时解决尽可能多的一系列方程.

其次,它把整数集合扩大成一个更大的数集合,但是仍具有与整数一样的算术结构(加法,乘法等等).这类推广在数学中是常常发生的.

最后,方程  $y^2 = x^3 - 2$  是一条椭圆曲线,而椭圆曲线在怀尔斯最后证明费尔马猜想的过程中起了关键性作用.

### 3.2 从欧拉到福尔廷斯

自从欧拉 1770 年对  $n=3$  的情况给出了费尔马猜想的一个不完整的证明后,对费尔马猜想的研究几十年几乎没有什么进展.直到 19 世纪初叶,当时数学界和物理界的巨匠之一高斯(Gauss Karl Friedrich)受其同事的鼓动研究费尔马猜想,高斯用一种方法证明了  $n=4$  时费尔马猜想是对的,接着他试图证明  $n=7$  时,但失败了.或许因为高斯厌恶自己的失败,他在 1816 年给奥尔伯斯(Olbers Heinrich W M)的一封信中曾怒气冲冲地说:“费尔马这个猜想作为一个孤立命题,我对它毫不感兴趣.”

法国一位靠自学成才的女数学家热尔曼(Germain Sophie)对费尔马猜想有过专门研究,她于 1820 年证明了:如果  $p$  是 100 以下的素数,且  $p \nmid xyz$ ,则  $x^p + y^p = z^p$  没有非零解( $p \nmid xyz$  叫费尔马猜想的情形 I.情形 II 是  $p \mid xyz$  的情形,通常认为这一情形难得多).

1825 年,年仅 20 岁的德国数学家狄利克雷(Dirichlet Peter Gustav Lejeune)在他的第一篇数学论文中,他运用代数数论的方法处理丢番图方程  $x^5 + y^5 = Az^5$ ,进而证明了费尔马方程  $x^n + y^n = z^n$  当  $n=5$  时无整数解.同年,年已 73 岁的法国数学家、法国科学院院士勒让德(Legendre Adrien-Marie)也证明了  $x^n + y^n = z^n$  当  $n=5$  时无整数解.1832 年,狄利克雷企图证明  $n=7$  的情形,但未获成功,不过他却证明了  $n=14$  的情形费尔马猜想是正确的.

1839 年,法国数学家拉梅(Lam Gabriel)证明了  $n=7$  的情形.由于他这个证明紧密地和数 7 联系在一起,没有希望把这个证明应用于  $n$  等于其它素数的情形.

由上所述,自 1670 年费尔马的儿子印行费尔马的著作到 1839 年拉梅证明了  $n=7$  的情形为止,在这 169 年中证明费尔马猜想的进展是极为缓慢的.

19 世纪中叶,德国数学家库麦(Kummer Ernst Eduard)对费尔马猜想的研究作出了重要的贡献.他按照欧拉的办法,把费尔马方程写成  $x^p = z^p - y^p$ ,然后把方程右边进行因式分解

$$x^p = z^p - y^p = (z - y)(z - \zeta y)(z - \zeta^2 y) \cdots (z - \zeta^{p-1} y)$$

其中  $\zeta = e^{2\pi i/p} = \cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$  是一个  $p$  次单位根,它适合  $\zeta^p = 1$ ,这样一来就要用到形如

$$a_0 + a_1 \zeta + \cdots + a_{p-1} \zeta^{p-1} \quad a_0, a_1, \cdots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$$

的数.这类数叫做分圆整数.库麦在 1843 年假定在分圆整数中唯一因子分解定理成立,由此出发,他给出了费尔马猜想的一个“证明”.当库麦把他的“证明”手稿寄给狄利克雷(此时狄利克雷已经是普鲁士科学院院士)时,狄利克雷指出,这个假定对证明费尔马猜想是必要的,但这个假定是错误的.在 1944 年,库麦认识到狄利克雷批评的正确性,他证明了对分圆整数来说,唯一分解定理通常并不成立.

1847 年,拉梅犯了与库麦同样的错误.拉梅曾在法国科学院的一次会议上宣布,他已经通过分圆整数的理论证明了费尔马猜想.可是当他讲出他的证明时,法国数学家、法国科学院院士刘维尔(Liouville Joseph)马上站起来反对拉梅把通常整数的性质用到分圆整数中去,使拉梅无言以答.特别是拉梅还把他这篇行不通的论文已经发表在法国科学院的报告上而为数学界所知,所以拉梅感到十分困窘,他懊悔地写信给柏林的朋友狄利克雷说:“只要是你在巴黎或我在柏林,这一切都不会发生.”

1847 年,法国著名数学家柯西(Cauchy Augustin-Louis)也给出了费尔马猜想的一个错误

的证明(柯西也犯了拉梅同样的错误)。

库麦认识到狄利克雷批评的正确性后,他再接再厉,为了重建唯一因子分解定理. 首先他引进一个概念叫做理想数,是分圆整数的一种推广,用来补救缺乏唯一因子分解特性这一不足之处. 其次,他定义了类数  $h$ , 用来衡量唯一因子分解性被破坏的程度. 于是,库麦在 1847 年(即拉梅和柯西给出费尔马猜想的一个错误的证明的同一年)证明了下面两个定理:

**定理 1** 如果  $p \nmid h$ (这样的  $p$  叫作正则素数),则费尔马猜想对于  $n=p$  成立.

**定理 2**  $p$  是正则素数,当且仅当  $p$  除不尽伯努利(Bernoulli)数  $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$  的所有分子(伯努利数由公式  $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$  所定义).

定理 2 的一个推论是:当  $p < 100$  时,只有 37, 59 和 67 是不正则素数.

法国科学院为表彰库麦的上述成就以及他对复域深入的研究,给他颁发了一个奖牌和奖金.

库麦在 1857 年得到了一些复杂的判断方法,用来对于某些不正则素数判断费尔马猜想是否成立,但是他的证明有些漏洞(这些漏洞直到本世纪 20 年代才由美国数学家范迪维尔(Vandiver Harry Shultz)补上,并由此得到费尔马猜想对于  $p < 100$  均成立). 在库麦工作的基础上,德国数学家戴德金(Dedekind Julius Wilhelm)于 1871 年创立了现代代数数论. 对此,本世纪的大数学家希尔伯特(Hilbert David)在 1900 年国际数学家大会上作报告时谈到费尔马猜想时说:“证明这种不可能性的尝试,提供了一个明显的例子,说明这样非常特殊、似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响. 受费尔马猜想的启发,库麦引进了理想数,并发现了把一个循环域的数分解为理想素因子的唯一分解定理,这一定理今天已被戴德金和克罗内克(Kronecker Leopold)推广到任意代数域,在近代数论中占着中心地位,而且其意义已远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域.”希尔伯特还说过:“费尔马猜想是一只会下金蛋的母鸡.”库麦说:“费尔马猜想与其说是科学的一处高峰,还不如说一件科学的珍宝.”

德国数学家林德曼(Lindemann Carl Louis Ferdinand)在 1882 年证明了  $\pi$  是超越数,从而彻底解决了困惑人们 2000 多年化圆为方问题,指出尺规作图化圆为方的不可能性. 也企图证明费尔马方程  $x^n + y^n = z^n$  无正整数解,但没有成功.

在本世纪以创立了“勒贝格测度和勒贝格积分理论”著称于世的法国数学家、法国科学院院士勒贝格(Lebesgue Henri Léon)晚年也沉迷于研究费尔马猜想,并曾向法国科学院呈上了一份论文,他说用他的理论已可全部解决费尔马猜想. 法国科学院非常高兴,如果这是真的,法国可以向全世界骄傲地称这个 300 年来的数学难题之一,已由他们本国人解决了. 然而经过一批数学家研究他的手稿后,发现他的证明有错误,因此还是不成功. 勒贝格在接到寄回的稿件和有关数学家的评语时,喃喃自语:“我想,我这个错误是可以改正的.”可是直到他死前,他还没有解决这个问题.

德国著名数学家希尔伯特深知要解决费尔马猜想是极为困难的,他 1920 年曾说,他不会去研究费尔马猜想,因为“至少要先紧张地读上三年书才能动手,我没有那么多时间花在可能失败的事上.”的确,由于费尔马猜想一直徘徊于数学研究的主流之外,数学家们在解决其它问题时所发展的强有力的工具对它都无济于事.

然而,300 多年来,不知有多少数学家和数学爱好者,曾在他们的“论文”中宣称他们证明

了费尔马猜想,但一经数学专家的严格检验,他们的“证明”都是错误的。据说,德国著名数论专家兰道(Landau Edmund Georg Herman)经常收到这样的“证明”,为此他印了许多明信片,上面印着:“亲爱的\_\_\_\_\_先生(或女士):你对费尔马猜想的证明已经收到,现予退回。第一个错误出现在第\_\_\_\_页第\_\_\_\_行。”兰道将这些明信片分发给他的学生们,吩咐他们将相应的数字填上去。在数学界曾经流传着一个故事:希尔伯特的一个学生,有一次写了一篇关于费尔马猜想的论文,一天晚上,他对希尔伯特说:“我已经证明了费尔马猜想,请老师看一看我的论文。”希尔伯特回答说:“哦!你可能太疲倦了,需要好好休息一下,明天再来找我。”第二天,这个学生又去找希尔伯特,并向希尔伯特说:“我已经发现昨天的证明是错误的。”但是各种各样的错误证明,依然源源不断的寄到许多国家的数学研究中心。

与此同时,也有一些数学家取得了一些新的进展。例如:

1909年,外斐力什(Wieferich)证明了:若 $x^p+y^p=z^p$ 并且 $p \nmid xyz$ (费尔马猜想的第一种情形有解),则 $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ 。这是一个很强的同余式,在计算机上特别容易检验。

1928年美国数学家范迪维尔证明:对于 $p < 619$ , $x^p+y^p=z^p$ 没有正整数解。1944年,他又把 $p$ 的数目推进到 $p < 4\,002$ 时, $x^p+y^p=z^p$ 都没有正整数解。他的这项工作获得美国政府的奖励。1944年,谢尔弗力基(Selfridge)和尼可(Nicol)也分别独立的获得了 $p < 4\,002$ 时, $x^p+y^p=z^p$ 都没有正整数解的证明。

1977年,瓦格斯塔夫(Wagstaff Samuel S)在大型计算机的帮助下证明当 $2 < p < 125\,000$ 时, $x^p+y^p=z^p$ 无整数解。换句话说,只要 $n$ 含有从2到125 000之间的任一个因子, $x^n+y^n=z^n$ 就一定没有正整数解。

菲尔兹奖得主、英裔美国籍数学家曼福德(Mumford David Bryart)用代数几何的工具证明如果费尔马方程 $x^n+y^n=z^n$ , $n \geq 3$ 要是解的话,也是极为稀少的。他的方法是这样的:假设 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)$ 是 $x^n+y^n=z^n$ 的解,我们不妨把这些解按 $z$ 的大小顺序排列,小的排在前面,大的排在后面,也就是 $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_m$ 。于是曼福德证明第 $m$ 个解 $z_m$ 大得不得了,即 $z_m > 10^{(10^{am+b})}$ ,其中 $a(>0)$ , $b$ 均为常数,这个数是象天文数字那么大!就连前面几个 $z_m$ 也有几十位上百位,从而他说明费尔马方程有解的可能性是非常之小的。

1983年德国年轻数学家福尔廷斯(Faltings Gerd)也证明了费尔马方程,当 $n \geq 3$ 时,至多有有限多个互素的正整数解。他的这个结论是作为他证明莫德尔(Mordell)猜想的一个特例。莫德尔猜想是说:“一个有理数域上具有亏格 $\geq 2$ 的多项式方程 $Q(x, y) = 0$ 只有有限个有理解。”而方程

$$x^n + y^n = 1 \quad (4)$$

当 $n \geq 4$ 时,具有亏格 $\geq 2$ ,因此由莫德尔猜想推出方程(4)只有有限个有理解。对方程(4)两边乘以公分母,立即得出方程 $x^n+y^n=z^n$ ( $n \geq 4$ )只有有限个正整数解。福尔廷斯的工作将费尔马猜想的证明推进了重大的一步,但在某种意义上,这又不是很有用的,因为我们希望证明解数实际上为零。然而莫德尔猜想不仅针对费尔马猜想,而且对一大批方程的一个非常强的命题。在证明莫德尔猜想时,福尔廷斯使用了从本世纪50年代以来所发展的现代代数几何工具。由于福尔廷斯的上述成就,他于1983年荣获了菲尔兹奖。

1988年,日本数学家宫冈洋一(Miyaoka)在德国波恩的马克斯-普朗克(Max-Planck)数学研究所作学术讲演时,他在讲演的一开始就写下充满黑板的一行字:“我证明了费尔马猜想!”尽管当时曾引起暂时的轰动,但经过一些数学家讨论后发现:宫冈洋一的证明用了几个未被证

明的代数几何命题,而这些命题的证明并不比费尔马猜想本身容易多少.

## 4 怀尔斯及怀尔斯的工作

怀尔斯出生于英国,他的父亲是牛津大学的神学家.怀尔斯10岁时,在他的家乡公共图书馆看到一本书上提到费尔马猜想,就立刻为之心驰神往,并花了大量时间和精力试图证明这个猜想,虽然没有成功,但费尔马猜想深深印入了他的脑海,并促使他走进了数学的殿堂,立志要做一个数学家、要致力于证明费尔马猜想.怀尔斯现在是英国皇家学会会员、美国普林斯顿大学数学教授.当他成为一个职业数学家以后,他才懂得要证明费尔马猜想只有少年的热情是远远不够的,必须有坚实的数学基础.

怀尔斯是一个安静而腼腆的人,脸上总带着微笑.他多年来深居简出,潜心研究数学问题.从1977年以来,他在椭圆曲线、高次明显互反律和岩泽健吉(Iwasawa)主猜想等许多数论问题都作出过相当重要的工作.

这次他对费尔马猜想的证明是建立在近年来许多人工作的基础上的,特别是利用费尔马猜想和椭圆曲线理论之间的联系:

早在1955年,日本数学家谷山(Taniyama)提出了一个尝试性的问题,是否能有少数特别选好的曲线来解释椭圆曲线的性质?椭圆曲线是由方程  $y^2 = x^3 + ax + b$  定义的曲线,其中  $a, b$  都是整数.谷山相当明确地提到了这些很特殊的曲线,即所谓模曲线(modular curves).能用模函数来参数化的椭圆曲线叫模曲线.随后法国著名数学家韦伊(Weil Andre)更明确了那些模曲线应该描述那些椭圆曲线.1971年日本数学家志村(Shimura)证明,对一类很特殊的方程这是对的.椭圆曲线都是模曲线这一猜想,现在被人们称为谷山-韦伊-志村猜想.

80年代中期,德国萨尔大学的年轻数学家费雷(Frey Gerhard)正着手考察描述椭圆曲线的“非常简单的方程”(他称之为).他意外地发现:谷山-韦伊-志村猜想和费尔马猜想有密切的关系,他认识到,如果  $a^p + b^p = c^p$ ,那么看上去椭圆曲线

$$y^2 = x(x - a^p)(y + b^p) \quad (5)$$

不适合谷山-韦伊-志村猜想.和前面一样,我们假定  $a, b, c$  是互素的非零整数,  $p$  是奇素数,曲线(5)叫做费雷曲线,类似于费尔马和欧拉研究过的曲线  $y^2 = x^3 - 2$ ,是一条椭圆曲线.一般说来,有理数域上的椭圆曲线是指由形如

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

的方程所定义的曲线,其中  $a, b, c, d$  都是有理数而且  $a \neq 0$ .

在实际造费雷曲线时,还需要对  $a, b, c$  作一点改动.注意  $a^p + b^p = c^p$  和  $b^p + a^p = c^p$  及  $a^p + (-c)^p = (-b)^p$  都等价(因为  $p$  是奇数).于是能重新安排方程的解,使得  $b$  是偶数并且  $a \equiv -1 \pmod{4}$ . 这样一来,费雷曲线是半稳定的(semistable),费雷给了“他的曲线不是模曲线”这个结果的不完整的证明.这样费雷就证明了:若谷山-韦伊-志村猜想成立,则可推出费尔马猜想成立.1985年新年,在德国的一次会议上,费雷把自己的手稿交给数学界,希望其他数学家帮助他完成他的这个不完整的证明.不久法国著名数学家塞尔(Serre Jean-Pierre,菲尔兹奖得主)提出了一个“关于模伽罗瓦表示的水平约化猜想”,可以填补费雷的不完整证明,但塞尔未能对他自己的这个猜想给出证明.1986年,美国加州大学伯克利分校的里贝特(Ribet Kenneth A)用被马祖尔博士称之为“美妙的办法”证明了塞尔“水平约化猜想”.于是,为了证明费尔马

猜想,只需证明谷山-韦伊-志村猜想成立.从而为证明费尔马猜想开辟了一条新的途径.但是许多数学家认为要证明谷山-韦伊-志村猜想也是极为困难的.

里贝特证明了谷山-韦伊-志村猜想与费尔马猜想的联系,极大的激发了怀尔斯的想象力.他说:“当我听到费雷和里贝特的结果时,我知道数学的全景已经变了”,“毫无疑问,他们作的事已经在我心理上完全改变了这个问题.在这以前,费尔马猜想和数论中其它问题相象,这些问题可以丢在一边几千年解决不了,却对数学没有什么影响.”他接着说:“费雷和里贝特所作的事情已经使费尔马猜想成为数学不能不管的一个问题的推论.依赖于这个问题的事情太多了.对我来说,这意味着费尔马猜想快解决了.而我一旦有了信心,就不能丢开手了.”怀尔斯从听到里贝特的结果的那一天起,就决心尽其终生用它来证明费尔马猜想.他在家秘密地实行自己的计划,坐在他那座都铎王朝式房子三楼的一间空荡的阁楼里,狂热地做这件研究.他说:“我基本上只想我的研究和我的家人,……,我从没有想停下来,它整日整夜地在我头脑里.”他不断取得了一些进展,到最后只剩下一些关键问题的时候,他正在读马祖尔的文章.怀尔斯说:“我记不得为什么要去读它.”但是他注意到其中提到一种作法(其实这种作法并不是新的,19世纪就已经有了,不过怀尔斯没有听说过.)怀尔斯茅塞顿开,他说:“我马上就明白了,我应该用这个作法.我会解决最后问题的.”

1993年6月23日怀尔斯在演讲中证明了对于有理数域上一大类椭圆曲线,即半稳定椭圆曲线来说,谷山-韦伊-志村猜想成立.所以他最后宣布:“我证明了费尔马猜想.”

怀尔斯在剑桥大学宣布他证明了费尔马猜想后,不少报刊很快作了报导.英国报纸说,怀尔斯的这项工作的预印本长达1 000多页,目前能完全看懂怀尔斯证明细节的数学家不会超过6人.里贝特认为,只有1/1 000的数学家能看懂怀尔斯的工作,因为他用的数学技术太深了.他说:“你得先懂得很多模形式和代数几何学,你必须一直紧跟着这个问题的进展.”

对怀尔斯的证明,有不少专家和权威人士的初步反应大多数持肯定的态度.例如意大利著名数学家庞比里(Bombieri Enrico,菲尔兹奖得主,他是这次怀尔斯在剑桥大学作演讲时的听众之一.)对英国《卫报》的记者说:“怀尔斯是一个非常仔细的数学家,从不草率地宣布结果.他的推理很美,而且并不十分难懂.我承认我只能懂其中的一部分,但证明的整个结构是十分可信的,是可靠的.”美国数学家里贝特和马祖尔都认为:怀尔斯证明的逻辑性是能说服人的,因为它的基础是近30年内很仔细的建筑起来的数学大厦,这些数学是研究者们曾普遍接受的.当代数论大师、菲尔兹奖及沃尔夫奖得主赛尔伯格(Selberg Atle)对怀尔斯的证明也持乐观态度.1993年6月25日,怀尔斯从剑桥大学回到普林斯顿时,受到了英雄凯旋般的欢迎.他兴奋而又疲倦,并说:“我有将近7年没有丢开这个问题了.真是日复一日地在干.我几乎想不起来有哪一天起床想的是别的事.”

尽管怀尔斯开辟了一条新的证明费尔马猜想的途径,但他的证明细节还未发表,因此有一些数学家提醒人们注意,怀尔斯的证明也可能有误,因为过去不少著名和不太著名的数学家都宣布得到了证明,但终因有错而栽了跟头.纽约柯朗研究所的数学家爱德华兹(Edwards)就指出:除非怀尔斯将他的证明发表在数学刊物上,这可需要一年时间再经过多次检查.他说:“甚至好的数学家有时也会给出错误的证明.”特别是1993年6月到12月怀尔斯一直未公布他的证明细节,又不愿公开露面,使得不少数学家推测:他的证明细节是否遇到了意外的问题,使一些原来欢呼认为他的工作是本世纪的最伟大的数学成就的人有些灰心.在这种压力下,怀尔斯前不久发表了一个声明,在声明中说,在审议过程中发现的几个问题已被解决,一个关键的证

明步骤:若塞尔默(Selmer)群是最小的,则每个超过一定有理数的半稳定椭圆曲线是模数的,也被确定.然而完整的证明需要说明:对特殊的塞尔默群的元素数的精确上限,怀尔斯在这一点尚未获得成功(即,对于与一个模形式相应的对称方表示的塞尔默群的精确上界的计算方面有漏洞.)对这一点,不少数学家对怀尔斯的证明仍持乐观态度;但也有不少数学家在怀尔斯完成这一工作并未正式发表论文前却持谨慎态度.

当代著名数学家、菲尔兹奖得主阿蒂雅(Atiyah M F)在1988年曾意味深长地说:“费尔马猜想扮演了类似珠穆朗玛峰对登山者(在成功之前)所起的作用.它是一个挑战,试图登上顶峰的企图刺激了新的技巧和技术的发展与完善.”

### 参 考 文 献

- 1 李心灿.杰出的业余数学家费马(纪念费马逝世320周年).数学通报,1985,(9):41~44
- 2 李心灿,王武保.费马.见:吴文俊主编.世界著名科学家传记:数学家Ⅱ.北京:科学出版社,1992.75~90
- 3 李心灿,黄汉平.数坛英豪.北京:科普出版社,1989.75~87
- 4 李心灿.微积分的创立者及其先驱.北京:航空工业出版社,1991
- 5 梁宗巨.世界数学史简编.沈阳:辽宁人民出版社,1980
- 6 冯克勤. Wiles A 宣布证明了费马猜想.中国数学会通讯,1993(3)
- 7 Gina Kolata. Progress on Fermat's famous math problem. Science, 1987, 235: 1572~1573
- 8 万哲先. 费尔马最后定理介绍. 数学的实践与认识, 1994, (1): 1~5
- 9 Edwards H M. Fermat's last theorem. [s. l. ]Springer-Verlag, 1977
- 10 Ribenboim P. 13 lectures on Fermat's last theorem. [s. l. ]; Springer-Verlag, 1979
- 11 Kenneth A Ribet. Wiles proves Taniyama's conjecture; Fermat's last theorem follows. Notices of AMS. 1993, 40 (6): 575~576
- 12 David Cox. 费马大定理介绍. 数学译林, 1993, (3): 300~310
- 13 董张维. 费马的最后定理. 数学通报, 1985, (9): 45~47
- 14 克莱因·M. 古今数学思想. 第一册, 第三册. 上海: 上海科学出版社, 1979
- 15 唐平桂. 费尔马大定理尚未得到最后证明. 中国科学报, 1994. 1. 12

## THE PAST AND PRESENT OF FERMAT'S CONJECTURE

Li Xincan

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics. Dept. of Applied Mathematics and Physics)

### ABSTRACT

This paper presents Fermat's conjecture, makes a brief account of the stirring deeds performed by mathematicians and mathematics enthusiasts for the past 300 odd years to testify Fermat's conjecture, and offers an assessment of Wiles's proving of the conjecture.

**Key words** Fermat's last theorem; elliptic curves; mathematical problems; semi stable elliptic curves