

2016 年全国初中数学联合竞赛（初二年级）试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，把 $x - [x]$ 称为 x 的小数部分. 已知 $t = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ ， a 是 t 的小数部分，

b 是 $-t$ 的小数部分，则 $\frac{1}{2b} - \frac{1}{a} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. $\sqrt{3}$.

【答】A.

$$\because t = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}, \text{ 而 } 3 < 2 + \sqrt{3} < 4, \therefore a = t - 3 = \sqrt{3} - 1.$$

$$\text{又 } \because -t = -2 - \sqrt{3}, \text{ 而 } -4 < -2 - \sqrt{3} < -3, \therefore b = -t - (-4) = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\therefore \frac{1}{2b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{3})} - \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. 三种图书的单价分别为 10 元、15 元和 20 元，某学校计划恰好用 500 元购买上述图书 30 本，那么不同的购书方案共有 ()

- A. 9 种. B. 10 种. C. 11 种. D. 12 种.

【答】C.

设购买三种图书的数量分别为 a, b, c ，则 $a + b + c = 30$ ， $10a + 15b + 20c = 500$ ，易得 $b = 20 - 2a$ ， $c = 10 + a$ ，于是 a 有 11 种可能的取值（分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10）. 对于每一个 a 值，对应地可求出唯一的 b 和 c ，所以，不同的购书方案共有 11 种.

3. 如图， P 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BAC = 70^\circ$ ， $\angle BPC = 120^\circ$ ， BD 是 $\angle ABP$ 的平分线， CE 是 $\angle ACP$ 的平分线， BD 与 CE 交于 F ，则 $\angle BFC =$ ()

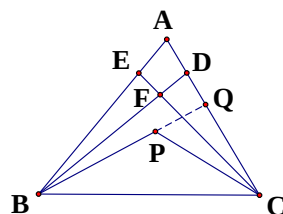
- A. 85° . B. 90° . C. 95° . D. 100° .

【答】C.

延长 BP 交 AC 于点 Q ，则 $\angle BPC = \angle ACP + \angle BQC$.

又因为 $\angle BQC = \angle A + \angle ABQ$ ，所以

$$\angle BPC = \angle A + \angle ACP + \angle ABQ \quad \text{①}$$



又因为 $\angle BFC = \angle ACE + \angle BDC$, $\angle BDC = \angle A + \angle ABD$, 所以
 $\angle BFC = \angle A + \angle ACE + \angle ABD$ ②

又 $\angle ACP = 2\angle ACE$, $\angle ABQ = 2\angle ABD$, 结合①、②两式可得

$$\angle BPC = \angle A + 2\angle ACE + 2\angle ABD = 2(\angle A + \angle ACE + \angle ABD) - \angle A = 2\angle BFC - \angle A,$$

$$\text{所以 } \angle BFC = \frac{1}{2}(\angle BPC + \angle A) = \frac{1}{2}(120^\circ + 70^\circ) = 95^\circ.$$

4. 记 $S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$, 则 $\frac{S_{2016}}{2016} =$ ()

- A. $\frac{2016}{2017}$. B. $\frac{2017}{2016}$. C. $\frac{2017}{2018}$. D. $\frac{2018}{2017}$.

【答】D.

对于正整数 k , 有

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = (1 + \frac{1}{k})^2 - \frac{2}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = (\frac{k+1}{k})^2 - \frac{2}{k} + (\frac{1}{k+1})^2 = (\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1})^2,$$

$$\text{所以 } \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ 故}$$

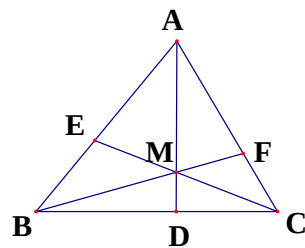
$$\begin{aligned} S_n &= \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= (1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{S_{2016}}{2016} = \frac{1}{2016} \times \frac{2016 \times 2018}{2017} = \frac{2018}{2017}.$$

5. 点 D 、 E 、 F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 AB 、 AC 上, 且 AD 、 BF 、 CE 相交于一点 M , 若 $\frac{AB}{BE} + \frac{AC}{CF} = 5$, 则 $\frac{AM}{MD} =$ ()

- A. $\frac{7}{2}$. B. 3. C. $\frac{5}{2}$. D. 2.

【答】B.



$$\text{设 } \frac{AM}{MD} = t, \text{ 由题设可得 } \frac{AE}{EB} = \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle BMC}} = \frac{tS_{\triangle DMC}}{S_{\triangle BMC}}, \quad \frac{AF}{FC} = \frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle BMC}} = \frac{tS_{\triangle BMD}}{S_{\triangle BMC}}, \text{ 所以}$$

$$\frac{AB}{BE} + \frac{AC}{CF} = \frac{AE}{EB} + \frac{AF}{FC} + 2 = \frac{tS_{\triangle DMC}}{S_{\triangle BMC}} + \frac{tS_{\triangle BMD}}{S_{\triangle BMC}} + 2 = \frac{t(S_{\triangle DMC} + S_{\triangle BMD})}{S_{\triangle BMC}} + 2 = \frac{tS_{\triangle BMC}}{S_{\triangle BMC}} + 2 = t + 2,$$

$$\text{又已知 } \frac{AB}{BE} + \frac{AC}{CF} = 5, \text{ 所以 } t + 2 = 5, \text{ 所以 } t = 3, \text{ 即 } \frac{AM}{MD} = 3.$$

6. 设 a, b, c, d 都是正整数, 且 $a^5 = b^2$, $c^3 = d^4$, $a - c = 319$, 则 $\frac{b}{a^2} - \frac{c}{d} =$ ()

- A. 15. B. 17. C. 18. D. 20.

【答】B.

设 $a^5 = b^2 = m^{10}$, $c^3 = d^4 = n^{12}$, 则 $a = m^2$, $b = m^5$, $c = n^4$, $d = n^3$.

由 $a - c = 319$ 得 $m^2 - n^4 = 319$, 即 $(m + n^2)(m - n^2) = 319$.

而 $319 = 319 \times 1 = 29 \times 11$, 所以 $\begin{cases} m + n^2 = 319, \\ m - n^2 = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m + n^2 = 29, \\ m - n^2 = 11. \end{cases}$

若 $\begin{cases} m + n^2 = 319, \\ m - n^2 = 1, \end{cases}$ 则 $n^2 = 159$, 此时 c, d 不是自然数, 不合题意, 舍去;

若 $\begin{cases} m + n^2 = 29, \\ m - n^2 = 11, \end{cases}$ 则 $m = 20$, $n = 3$. 所以 $\frac{b}{a^2} - \frac{c}{d} = \frac{m^5}{(m^2)^2} - \frac{n^4}{n^3} = m - n = 17$.

二、填空题: (本题满分 28 分, 每小题 7 分)

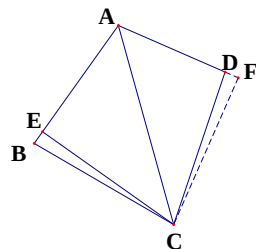
1. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 的对角互补, 且 $\angle BAC = \angle DAC$, $AB = 15$, $AD = 12$. 过顶点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 则 $\frac{AE}{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】9.

过顶点 C 作 $CF \perp AD$ 于 F , 又因为 $\angle BAC = \angle DAC$, $CE \perp AB$, 所以 $\triangle ACE \cong \triangle ACF$, 所以 $AE = AF$, $CE = CF$.

又 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 所以 $\angle CDF = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = \angle EBC$, 故 $\triangle BCE \cong \triangle DCF$, 所以 $BE = DF$.

而 $AB = AE + BE$, $AD = AF - DF$, 所以 $AB + AD = AE + AF + BE - DF = 2AE$, 所以 $AE = \frac{1}{2}(AB + AD) = 13.5$, $BE = AB - AE = 1.5$, 所以 $\frac{AE}{BE} = \frac{13.5}{1.5} = 9$.



2. 已知整数 a, b, c 满足不等式 $a^2 + 2b^2 + c^2 + 211 < ab + 28b + 20c$, 则 $a + b - c = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答】2.

因为整数 a, b, c 满足不等式 $a^2 + 2b^2 + c^2 + 211 < ab + 28b + 20c$, 所以 $a^2 + 2b^2 + c^2 + 212 \leq ab + 28b + 20c$, 即 $a^2 + 2b^2 + c^2 - ab - 28b - 20c + 212 \leq 0$, 即 $(a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{7}{4}(b - 8)^2 + (c - 10)^2 \leq 0$.

显然 $(a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{7}{4}(b - 8)^2 + (c - 10)^2 \geq 0$, 故有 $(a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{7}{4}(b - 8)^2 + (c - 10)^2 = 0$,

于是有 $a - \frac{1}{2}b = 0$, $b - 8 = 0$, $c - 10 = 0$, 所以 $a = 4$, $b = 8$, $c = 10$, 所以 $a + b - c = 2$.

3. 若质数 p, q 满足: $3q - p - 4 = 0$, $p + q < 111$. 则 pq 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答】1007.

由 $3q - p - 4 = 0$ 得 $p = 3q - 4$, 所以 $pq = q(3q - 4)$, 显然 $q(3q - 4)$ 的值随着质数 q 的增大而增大, 当且仅当 q 取得最大值时 pq 取得最大值.

又因为 $p + q < 111$, 即 $p + q = 4q - 4 < 111$, 所以 $q < 29$. 因为 q 为质数, 所以 q 的可能的取值为 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2. 当 $q = 23$ 时, $p = 3q - 4 = 65$, 不是质数; 当 $q = 19$ 时, $p = 3q - 4 =$

53, 是质数.

所以, q 的最大值为 19, pq 的最大值为 $53 \times 19 = 1007$.

4. 将 5 个 1、5 个 2、5 个 3、5 个 4、5 个 5 共 25 个数填入一个 5 行 5 列的表格内 (每格填入一个数), 使得同一列中任何两数之差的绝对值不超过 2. 考虑每列中各数之和, 设这 5 个和的最小值为 M , 则 M 的最大值为_____.

【答】10.

依据 5 个 1 分布的列数的不同情形分别求 M 的最大值.

若 5 个 1 分布在同一列, 则 $M = 5$;

若 5 个 1 分布在两列中, 则由题设知这两列中出现的最大数至多为 3, 故 $2M \leq 5 \times 1 + 5 \times 3 = 20$, 所以 $M \leq 10$;

若 5 个 1 分布在三列中, 则由题设知这三列中出现的最大数至多为 3, 故 $3M \leq 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 = 30$, 所以 $M \leq 10$;

若 5 个 1 分布在至少四列中, 则其中某一列至少有一个数大于 3, 与题设矛盾.

综上所述, $M \leq 10$;

另一方面, 右边给出的例子说明 M 可以取到 10. 故 M 的最大值为 10.

1	1	1	4	5
1	1	2	4	5
2	2	2	4	5
3	3	2	4	5
3	3	3	4	5

第二试

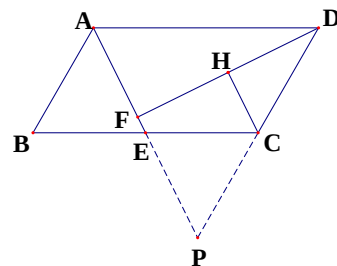
一、(本题满分 20 分)如图, $ABCD$ 为平行四边形, E 为 BC 的中点, $DF \perp AE$ 于 F , H 为 DF 的中点, 证明: $CH \perp DF$.

证明 分别延长 AE 和 DC , 交于点 P .

因为 $AB \parallel CP$, 所以 $\angle ABE = \angle PCE$, 又因为 $CE = BE$, $\angle AEB = \angle PEC$, 所以 $\triangle ABE \cong \triangle PCE$, 所以 $PC = AB$10 分

又 $AB = CD$, 所以 $PC = CD$, 故 C 为 PD 的中点.

又 H 为 DF 的中点, 所以 $CH \parallel PF$. 又已知 $DF \perp AE$, 所以 $CH \perp DF$.
.....20 分



二、(本题满分 25 分) 设互不相等的非零实数 a, b, c 满足 $a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a}$, 求 $(a + \frac{2}{b})^2 + (b + \frac{2}{c})^2 + (c + \frac{2}{a})^2$ 的值.

解 由 $a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a}$ 可得 $bc(a-b) = 2(b-c)$, $ab(c-a) = 2(a-b)$, $ac(b-c) = 2(c-a)$,

三式相乘得 $(abc)^2(a-b)(b-c)(c-a) = 8(a-b)(b-c)(c-a)$, 而 a, b, c 互不相等, 所以 $(abc)^2 = 8$.

.....10 分

设 $a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a} = k$, 则 $kb = ab + 2$, $kc = bc + 2$, $ka = ac + 2$, 于是可得 $k(b-c) =$

$b(a-c)$, $k(c-a) = c(b-a)$, $k(a-b) = a(c-b)$,15 分

三式相乘得 $k^3(a-b)(b-c)(c-a) = abc(a-c)(b-a)(c-b)$,

而 a, b, c 互不相等, 所以 $k^3 = -abc$.

.....20 分

于是可得 $k^6 = (-abc)^2 = 8$, 所以 $k^2 = 2$.

因此 $(a + \frac{2}{b})^2 + (b + \frac{2}{c})^2 + (c + \frac{2}{a})^2 = 3k^2 = 6$25 分

三、(本题满分 20 分) 已知 a, b 为正整数, 求 $M = 3a^2 - ab^2 - 2b - 4$ 能取到的最小正整数值.

解 因为 a, b 为正整数, 要使得 $M = 3a^2 - ab^2 - 2b - 4$ 的值为正整数, 显然有 $a \geq 2$.

当 $a = 2$ 时, b 只能为 1, 此时 $M = 4$, 故 $M = 3a^2 - ab^2 - 2b - 4$ 能取到的最小正整数值不超过 4.
.....5 分

当 $a = 3$ 时, b 只能为 1 或 2. 若 $b = 1$, 则 $M = 18$; 若 $b = 2$, 则 $M = 7$.

当 $a = 4$ 时, b 只能为 1 或 2 或 3. 若 $b = 1$, 则 $M = 38$; 若 $b = 2$, 则 $M = 24$; 若 $b = 3$, 则 $M = 2$.
.....15 分

下面考虑: $M = 3a^2 - ab^2 - 2b - 4$ 的值能否为 1?

若 $M = 1$, 即 $3a^2 - ab^2 - 2b - 4 = 1$, 即 $3a^2 - ab^2 = 2b + 5$ ①, 注意到 $2b + 5$ 为奇数, 所以 a 是奇数,

b 是偶数, 此时, $3a^2 - ab^2$ 被 4 除所得余数为 3, $2b + 5$ 被 4 除所得余数为 1, 故①式不可能成立, 即 $M \neq 1$.

因此, $M = 3a^2 - ab^2 - 2b - 4$ 能取到的最小正整数值为 2.25 分