2016年全国初中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设7分和0分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：（本题满分42分，每小题7分）

1. 用$[x]$表示不超过x的最大整数，把$x-[x]$称为x的小数部分. 已知$t=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，a是t的小数部分，b是$-t$的小数部分，则$\dfrac{1}{2b}-\dfrac{1}{a}=$ （　　）

A. $\dfrac{1}{2}$.　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　C. 1.　　D. $\sqrt{3}$.

【答】A.

$\because t=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，而$3<2+\sqrt{3}<4$，$\therefore a=t-3=\sqrt{3}-1$.

又$\because -t=-2-\sqrt{3}$，而$-4<-2-\sqrt{3}<-3$，$\therefore b=-t-(-4)=2-\sqrt{3}$.

$$\therefore \frac{1}{2b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{2(2-\sqrt{3})}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. 三种图书的单价分别为10元、15元和20元，某学校计划恰好用500元购买上述图书30本，那么不同的购书方案共有 （　　）

A．9种.　　B．10种.　　C．11种.　　D．12种.

【答】C.

设购买三种图书的数量分别为a,b,c，则$a+b+c=30$，$10a+15b+20c=500$，易得$b=20-2a$，$c=10+a$，于是a有11种可能的取值（分别为0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10）.对于每一个a值，对应地可求出唯一的b和c，　所以，不同的购书方案共有11种.

3. 如果一个正整数可以表示为两个连续奇数的立方差，则称这个正整数为“和谐数”。如：$2=1^3-(-1)^3$，$26=3^3-1^3$，2和26均为“和谐数”.那么，不超过2016的正整数中，所有的“和谐数”之和为 （　　）

A．6858.　　B．6860.　　C．9260.　　D．9262.

【答】B.

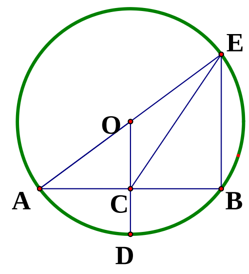
注意到$(2k+1)^3-(2k-1)^3=2(12k^2+1)$，由$2(12k^2+1)\le 2016$得$|k|<10$.

取k＝0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，即得所有的不超过2016的“和谐数”，它们的和为

$$[1^3-(-1)^3]+(3^3-1^3)+(5^3-6^3)+\cdots+(19^3-17^3)=19^3+1=6860.$$

4. 已知⊙O的半径OD垂直于弦AB，交AB于点C，连接AO并延长交⊙O于点E，若AB＝8, CD＝2，则△BCE的面积为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 12.　　　　　B. 15.　　　　　C. 16.　　　　　D. 18.



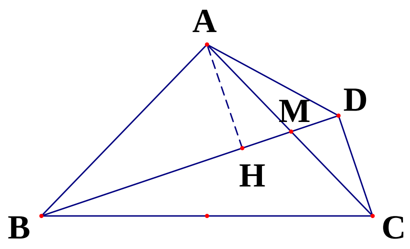
【答】A.

设$OC=x$，则$OA=OD=x+2$，在Rt△OAC中，由勾股定理得$OC^2+AC^2=OA^2$，

即$x^2+4^2=(x+2)^2$，解得$x=3$.又OC为△ABE的中位线，所以$BE=2OC=6$.

所以直角△BCE的面积为$\frac{1}{2}CB\cdot BE=12$.

5. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle BAC=\angle BDC=90°$，$AB=AC=\sqrt{5}$，$CD=1$，对角线的交点为$M$，则$DM=$　　　　　　　　　　　（　　）



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.　　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　　D. $\frac{1}{2}$.

【答】D.

作$AH\perp BD$于点H，易知△AMH∽△CMD，所以$\frac{AH}{CD}=\frac{AM}{CM}$，又$CD=1$，所以

$AH=\frac{AM}{CM}$　　　　　　　①

设$AM=x$，则$CM=\sqrt{5}-x$.

在Rt△ABM中，可得$AH=\frac{AB\cdot AM}{BM}=\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5+x^2}}$.

所以，由①式得$\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{5}-x}$，解得$x=\frac{\sqrt{5}}{2}$（另一解$x=2\sqrt{5}$舍去）.

所以$CM=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$DM=\sqrt{CM^2-CD^2}=\frac{1}{2}$.

6. 设实数x,y,z满足$x+y+z=1$，则$M=xy+2yz+3xz$的最大值为　　　　　（　　）

A. $\frac{1}{2}$.　　　　B. $\frac{2}{3}$.　　　　C. $\frac{3}{4}$.　　　　D. 1.

【答】C.

$M=xy+2yz+3xz=xy+(2y+3x)(1-x-y)=-3x^2-4xy-2y^2+3x+2y$

$=-2[y^2+2(x-\frac{1}{2})y+(x-\frac{1}{2})^2]-3x^2+3x+2(x-\frac{1}{2})^2=-2(y+x-\frac{1}{2})^2-x^2+x+\frac{1}{2}$

$=-2(y+x-\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\le\frac{3}{4}$，

所以$M=xy+2yz+3xz$的最大值为$\frac{3}{4}$.

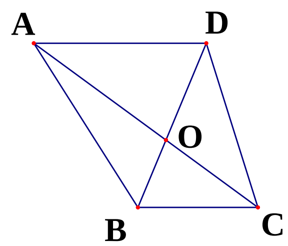
二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1. 已知△ABC的顶点A、C在反比例函数$y=\dfrac{\sqrt{3}}{x}(x>0)$的图象上，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，$AB\perp x$轴，点$B$在点$A$的上方，且$AB=6$，则点$C$的坐标为_______.

【答】$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2)$.

作$CD\perp AB$于点D，易求得$CD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$AD=\dfrac{3}{2}$.设$C(m,\dfrac{\sqrt{3}}{m})$，$A(n,\dfrac{\sqrt{3}}{n})$，结合题意可知$n>m>0$，$D(n,\dfrac{\sqrt{3}}{m})$，所以$CD=n-m$，$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{m}-\dfrac{\sqrt{3}}{n}$，故$n-m=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{m}-\dfrac{\sqrt{3}}{n}=\dfrac{3}{2}$，联立解得$m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$n=2\sqrt{3}$.所以，点$C$的坐标为$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2)$.

2. 在四边形$ABCD$中，$BC\,//\,AD$，CA平分$\angle BCD$，O为对角线的交点，$CD=AO$，$BC=OD$，则$\angle ABC=$_______.



【答】$126°$.

因为$BC\,//\,AD$，CA平分$\angle BCD$，所以$\angle DAC=\angle ACB=\angle ACD$，所以$DA=DC$，又$CD=AO$，所以$AD=AO$，所以$\angle ADO=\angle AOD$.

记$\angle DAC=\angle ACB=\angle ACD=\alpha$，$\angle ADO=\angle AOD=\beta$.

又$BC\,//\,AD$，所以△$ADO\backsim$△CBO，结合$AD=AO$可得$OC=BC$，且$\angle CBO=\angle COB=\beta$.

又$BC=OD$，所以$OC=OD$，所以$\angle ODC=\angle OCD=\alpha$.

结合图形可得：$\beta=2\alpha$且$\alpha+2\beta=180°$，解得$\alpha=36°$，$\beta=72°$.

所以$\angle DBC=\angle DCB=72°$，所以$BD=CD=AD$，所以$\angle DAB=\angle DBA=54°$，于是可得$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=126°$.

3. 有位学生忘记写两个三位数间的乘号，得到一个六位数. 这个六位数恰好为原来两个三位数的乘积的3倍，这个六位数是_______.

【答】167334.

设两个三位数分别为x和y，由题设知$1000x+y=3xy$　　　　①

由①式得$y=3xy-1000x=(3y-1000)x$，故y是x的整数倍，不妨设$y=tx$（t为正整数），代入①式得$1000+t=3tx$，所以$x=\dfrac{1000+t}{3t}$.因为x是三位数，所以$x=\dfrac{1000+t}{3t}\geq 100$，从而可得$t\leq\dfrac{1000}{299}$，又$t$为正整数，故$t$的可能的取值只能是1，2，3.

验证可知：只有$t=2$符合题意.所以$t=2$，$x=167$，$y=334$，所求的六位数为167334.

4. 将5个1、5个2、5个3、5个4、5个5共25个数填入一个5行5列的表格内（每格填入一个数），使得同一列中任何两数之差的绝对值不超过2. 考虑每列中各数之和，设这5个和的最小值为M，则M的最大值为_______.

【答】10.

依据 5 个 1 分布的列数的不同情形分别求 M 的最大值.

若 5 个 1 分布在同一列，则 $M=5$；

若 5 个 1 分布在两列中，则由题设知这两列中出现的最大数至多为 3，故 $2M\le 5\times1+5\times3=20$，所以 $M\le10$；

若 5 个 1 分布在三列中，则由题设知这三列中出现的最大数至多为 3，故 $3M\le 5\times1+5\times2+5\times3=30$，所以 $M\le10$；

若 5 个 1 分布在至少四列中，则其中某一列至少有一个数大于 3，与题设矛盾.

综上所述，$M\le10$；

另一方面，右边给出的例子说明 M 可以取到 10.故 M 的最大值为 10.

1	1	1	4	5
1	1	2	4	5
2	2	2	4	5
3	3	2	4	5
3	3	3	4	5

第一试(B)

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 题目和解答与（A）卷第 1 题相同.

2．题目和解答与（A）卷第 2 题相同.

3．已知二次函数 $y=ax^2+bx+1(a\ne0)$ 的图象的顶点在第二象限，且过点（1，0）. 当 $a-b$ 为整数时，$ab=$ （　　）

A．0.　　　B．$\dfrac{1}{4}$.　　　C．$-\dfrac{3}{4}$.　　　D．-2.

【答】B.

由于二次函数 $y=ax^2+bx+1(a\ne0)$ 的图象的顶点在第二象限，且过点（1，0）和（0，1），故 $a<0$，$-\dfrac{b}{2a}<0$，$a+b+1=0$，所以 $b<0$ 且 $b=-a-1$，于是可得 $-1<a<0$.

当 $a-b=2a+1$ 为整数时，因为 $-1<2a+1<1$，所以 $2a+1=0$，故 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$，所以 $ab=\dfrac{1}{4}$.

4．题目和解答与（A）卷第 4 题相同.

5．题目和解答与（A）卷第 5 题相同.

6．题目和解答与（A）卷第 6 题相同.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．已知△ABC 的最大边 BC 上的高线 AD 和中线 AM 恰好把 $\angle BAC$ 三等分，$AD=\sqrt{3}$，则 $AM=$ ______.

【答】2.

显然 $\angle ABC\ne\angle ACB$.若 $\angle ABC>\angle ACB$，则由已知条件易知△ADM ≌△ADB，所以 $BD=DM=\dfrac{1}{2}CM$.又因为 AM 平分 $\angle DAC$，所以，由角平分线定理可得 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DM}{CM}=\dfrac{1}{2}$，即 $\cos\angle DAC=\dfrac{1}{2}$，所以 $\angle DAC=60°$，进而可得 $\angle BAC=90°$，$\angle ACD=30°$.

在 Rt△ADC 中，$AD=\sqrt{3}$，$\angle ACD=30°$，可求得 $CD=3$，所以 $DM=1$.

在 Rt△ADM 中，由勾股定理得 $AM=\sqrt{AD^2+DM^2}=2$.

若 $\angle ABC<\angle ACB$，同理可求得 $AM=2$.

2．题目和解答与（A）卷第 1 题相同.

3．若质数 p,q 满足：$3q-p-4=0$，$p+q<111$.则 pq 的最大值为______.

【答】1007.

由 $3q-p-4=0$ 得 $p=3q-4$，所以 $pq=q(3q-4)$，显然 $q(3q-4)$ 的值随着质数 q 的增大而增大，当且仅当 q 取得最大值时 pq 取得最大值.

又因为 $p+q<111$，即 $p+q=4q-4<111$，所以 $q<29$.因为 q 为质数，所以 q 的可能的取值为 23，19，17，13，11，7，5，3，2.当 $q=23$ 时，$p=3q-4=65$，不是质数；当 $q=19$ 时，$p=3q-4=53$，是质数.

所以，q 的最大值为 19，pq 的最大值为 53×19＝1007.

4．题目和解答与（A）卷第 3 题相同.

第二试 （A）

一、（本题满分 20 分）已知 a,b 为正整数，求 $M=3a^2-ab^2-2b-4$ 能取到的最小正整数值.

解 因为 a,b 为正整数，要使得 $M=3a^2-ab^2-2b-4$ 的值为正整数，显然有 $a\ge 2$.

当 $a=2$ 时，b 只能为 1，此时 $M=4$，故 $M=3a^2-ab^2-2b-4$ 能取到的最小正整数值不超过 4.

…………………5 分

当 $a=3$ 时，b 只能为 1 或 2. 若 $b=1$，则 $M=18$；若 $b=2$，则 $M=7$.

当 $a=4$ 时，b 只能为 1 或 2 或 3. 若 $b=1$，则 $M=38$；若 $b=2$，则 $M=24$；若 $b=3$，则 $M=2$.

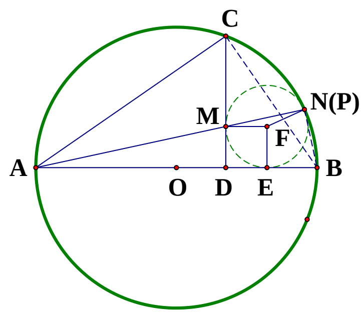
…………………10 分

下面考虑：$M=3a^2-ab^2-2b-4$ 的值能否为 1？

若 $M=1$，即 $3a^2-ab^2-2b-4=1$，即 $3a^2-ab^2=2b+5$ ①，注意到 $2b+5$ 为奇数，所以 a 是奇数，b 是偶数，此时，$3a^2-ab^2$ 被 4 除所得余数为 3，$2b+5$ 被 4 除所得余数为 1，故①式不可能成立，即 $M\ne 1$.

因此，$M=3a^2-ab^2-2b-4$ 能取到的最小正整数值为 2. **……………………20 分**

二、（本题满分 25 分）如图，点 C 在以 AB 为直径的⊙O 上，$CD\perp AB$ 于点 D，点 E 在 BD 上，$AE=AC$，四边形 $DEFM$ 是正方形，AM 的延长线与⊙O 交于点 N. 证明：$FN=DE$.



证明 连接 BC、BN. ∵ AB 为⊙O 的直径，$CD\perp AB$，

∴ $\angle ACB=\angle ANB=\angle ADC=90°$.

∵ $\angle CAB=\angle DAC$，$\angle ACB=\angle ADC$，∴ $\triangle ACB\backsim\triangle ADC$，

∴ $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$，∴ $AC^2=AD\cdot AB$. **……………………5 分**

又由 $DEFM$ 为正方形及 $CD\perp AB$ 可知：点 M 在 CD 上，

$DE=DM=EF=MF$.

$\because \angle NAB=\angle DAM$，$\angle ANB=\angle ADM$，$\therefore \triangle ANB \backsim \triangle ADM$，$\therefore \dfrac{AN}{AD}=\dfrac{AB}{AM}$，

$\therefore AD\cdot AB=AM\cdot AN$. $\therefore AC^2=AM\cdot AN$，又 $AE=AC$，$\therefore AE^2=AM\cdot AN$.

……………………15 分

以 F 为圆心、FE 为半径作$\odot F$，与直线 AM 交于另一点 P，显然：$\odot F$ 与 AB 切于点 E. 于是，由切割线定理可得 $AE^2=AM\cdot AP$.

$\therefore AN=AP$，$\therefore$点 N 即为点 P，$\therefore$点 N 在$\odot F$ 上，$\therefore FN=FE=DE$.

……………………25 分

三、（本题满分 25 分）已知正实数 x,y,z 满足：$xy+yz+zx\neq 1$且

$$\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}+\frac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz}+\frac{(z^2-1)(x^2-1)}{zx}=4.$$

（1）求 $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$ 的值.

（2）证明：$9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz(xy+yz+zx)$.

解　（1）由等式 $\dfrac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}+\dfrac{(y^2-1)(z^2-1)}{yz}+\dfrac{(z^2-1)(x^2-1)}{zx}=4$ 得

$z(x^2-1)(y^2-1)+x(y^2-1)(z^2-1)+y(z^2-1)(x^2-1)=4xyz$，

展开整理得 $x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2-[x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)]+(x+y+z)=4xyz$，

即 $xyz(xy+yz+xz)-(x+y+z)(xy+yz+xz)+(x+y+z)-xyz=0$，

所以 $[xyz-(x+y+z)](xy+yz+xz-1)=0$.　……………………10 分

又因为 $xy+yz+zx\neq 1$，所以 $xyz-(x+y+z)=0$，所以 $xyz=x+y+z$，因此，$\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=1$.

……………………15 分

（2）因为 x,y,z 为正数，所以

$9(x+y)(y+z)(z+x)-8xyz(xy+yz+zx)=9(x+y)(y+z)(z+x)-8(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$=x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2-6xyz=x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\geq 0$，

所以 $9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz(xy+yz+zx)$.

……………………25 分

第二试 （B）

一、（本题满分 20 分）题目和解答与（A）卷第一题相同.

二、（本题满分 25 分）已知：$a+b+c=5$，$a^2+b^2+c^2=15$，$a^3+b^3+c^3=47$.

求$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$的值.

解　因为$a+b+c=5$，$a^2+b^2+c^2=15$，所以$2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=10$，所以$ab+bc+ac=5$.　　**……………………5 分**

结合恒等式$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$，可得$47-3abc=5(15-5)$ $=50$，所以$abc=-1$.　　**……………………10 分**

而$a^2+ab+b^2=(a+b)(a+b+c)-(ab+bc+ac)=5(5-c)-5=5(4-c)$.　**……………15 分**

同理可得$b^2+bc+c^2=5(4-a)$，$c^2+ca+a^2=5(4-b)$，所以

$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)=125(4-a)(4-b)(4-c)$

$=125[64-16\times5+4\times5-(-1)]=625$.　　**……………………25 分**

三、（本题满分 25 分）如图，在等腰△ABC中，$AB=AC=\sqrt{5}$，D为BC边上异于中点的点，点C关于直线AD的对称点为点E，EB的延长线与AD的延长线交于点F，求$AD\cdot AF$的值.

解　连接AE、ED、CF，由题设条件可知$\angle ABC=\angle ACB=\angle AED$，所以$A$、$E$、$B$、$D$四点共圆，于是可得$\angle BED=\angle BAD$.

……………………10 分

又因为点C和点E关于直线AD对称，所以$\angle BED=\angle BCF$.

……………………15 分

因此$\angle BAD=\angle BCF$，所以A、B、F、C四点共圆，又$AB=AC$，所以$\angle ABD=\angle ACB=\angle AFB$，　**……………………20 分**

所以△ABD∽△AFB，所以$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AD}{AB}$，所以$AD\cdot AF=AB^2=5$.

……………………25 分