代　　数

王建伟

1. 给定整数$n \ge 3$,设$a_k \in [0,1]$, $k=1,2,\cdots,n$.记$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$, $k=1,2,\cdots,n$.
求证:$|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k-\sum\limits_{k=1}^{n} A_k|<\frac{n-1}{2}$.

2. 求最小的正实数λ,使得对任何整数$n \ge 2$,及$a_k \in [0,1], k=1,2,\cdots,n$,都有:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} A_k| \le \lambda n$$

这里,$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$, $k=1,2,\cdots,n$.

3. 求值:$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}$.

4. 求所有函数$f:\ R^+ \to R^+$,满足:

$$f(x)<2x-\frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}},\quad \forall x>0,$$

且 $$f(f(x))=\tfrac{5}{2}f(x)-x.$$

5. 多项式序列$\{P_n(x)\}_{n\ge 1}$满足:$P_2(x)=x^2-2$,且对任意正整数m,n,有$P_m(P_n(x))=P_n(P_m(x))$, 又知$P_n(x)$是n次实系数多项式.求所有这样的多项式序列.

6. 求所有函数$f:R^+\to R^+$,满足:对任意$x,y>0$,都有

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}$$

7. 如果函数$f:R\to R$满足：对一切实数x,有

$$\sqrt{2f(x)}-\sqrt{2f(x)-f(2x)} \ge 2$$

恒成立，就称函数f具有性质P.

求最大的实数λ,使得只要f具有性质P,就对一切实数x,有$f(x)\ge\lambda$恒成立.

8. 给定整数$n\ge 3$,求复数集的所有n元子集S,具有性质:

若$a,b\in S$,则$ab\in S$. (a,b可以相同)

9. 试问:是否存在非零实数a,b,c,使得对任何$n>3$,都可以找到某个如下形式的多项式

$$P_n(x)=x^n+\cdots+ax^2+bx+c,$$

它恰有n个整数根(不一定互不相同)?

10. 设$a_1>0,\ a_{n+1}=a_1+\frac{n}{a_n}$,试求$a_1$满足的充要条件, 使得$\{a_n\}$严格递增.

11. 是否存在二次函数$f(x)=x^2+px+q\ (p,q$为实数),使得方程$f(f(f(x)))=0$恰有7个不同实根?

12. 是否存在正次数的复系数多项式$f(x)$,满足:

$$f(x^2+1)=f(x)^2-1\quad ?$$

13. 试求出所有的实系数多项式$P(x)$,使得对满足$ab+bc+ca=0$的所有实数a,b,c,都有:$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$.

14. 如果$P(Q(x))=Q(P(x))$,就称多项式 P 和 Q 是可交换的.给定实系数多项式$P(x)=x^2+bx+c$.已知Q和R是正次数的实系数多项式,且Q、R均和P是可交换的.

证明: Q和R是可交换的.

15. 求$\cos\dfrac{\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}+\cos\dfrac{9\pi}{13}$的值.

16. $n\in\mathbb{N}_+$,化简:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k^{n+1}}{(k-1)\cdots\widehat{(k-k)}\cdots(k-n-1)}$$

17. (1) $f:\ N_+\to N_+$满足$f(n)=f(n+f(n)),\ \forall n$.

证明:若f取了有限多个值, 则f是周期的.

(2) 构造一个非周期函数$f:\ N_+\to N_+$,满足:

$$f(n)=f(n+f(n)),\ \forall n.$$

18. 如果存在正整数k,使得$\alpha=\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$,就称$\alpha$是好数. 求证:好数的任意正整数次方仍是好数.

数　论

王建伟

1. 设S是所有有理数r组成的集合,其中$0 < r < 1$,并且它有十进制表示形式: $r = 0.abcabcabc\cdots$,这里a, b, c不必互不相同.把S中的元素写成最简分数的形式,那么分子共有______________种不同的取值.

2. 若$m, n \in \mathbb{N}_+$, $(m, n) = 1$, $m < n$, $\dfrac{m}{n}$的小数表示中含有$\overline{251}$,则n的最小值为______________。

3. 方程$[\frac{x}{2}] + [\frac{x}{3}] + [\frac{x}{7}] = x$的所有实数解的个数为______________，所有实数解的和为______________.

4. 求所有正整数n,使得存在正整数$x_1, x_2, \cdots, x_n$, y满足:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = y^2.$$

5. 给定正整数k,求所有的函数$f : N_+ \to N_+$,使得对于任意的$m, n \in N_+$,均有:

$$f(m) + f(n) | (m + n)^k$$

6. 求最大的正整数n $(n > 10)$,使得n对$[2, \frac{n}{2}]$的每个平方数作除法时,所得的余数总为奇数.

7. 求所有正实数对(a, b),满足:对任意正整数n,都有$[a[bn]] = n - 1$.

8. 对正整数m,记$S(m) = m$的各位数字之和.

证明:存在无穷多个正整数n,使得$S(2^n) > S(2^{n+1})$.

9. 求所有正次数的有理系数多项式$P(x)$,使得对任意有理数y,方程$P(x) = y$都有有理根x.

10. 若$\sigma(n) = 2n + 1$,则称正整数n为拟完全数.证明:拟完全数必是奇平方数.

11. 给定整数$n \geq 2$.证明:若方程$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = kx_1x_2\cdots x_n$有正整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则正整数$k \leq n$.

12. 证明:除了有限个正整数外,其它的正整数n均可表示为2011个正整数之和:

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011},$$

且满足:$a_1 < a_2 < \cdots < a_{2011}$, $a_i | a_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, 2010$.

13. 设T和1是函数$f(x)$的周期,且$0 < T < 1$,证明:

(1) 若T为有理数,则存在素数p,使$\frac{1}{p}$是$f(x)$的周期;

(2) 若T为无理数,则存在各项均为正无理数的数列$\{a_n\}$满足:

$$1 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots, \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

且每个a_n都是$f(x)$ 的周期.

(3) 给定$T(0 < T < 1, T$为无理数),是否存在一个不恒为常数的函数$f(x)$, 它以1和T为周期?

14. 设θ为无理数.证明:存在正整数列$m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$,使得:

$$\{m_1\theta\} > \{m_2\theta\} > \cdots > \{m_k\theta\} > \cdots$$

且$\lim\limits_{k \to +\infty} \{m_k\theta\} = 0$.

15. 证明:对任意正整数m,方程

$$\frac{n}{m} = \left[\sqrt[3]{n^2}\right] + \left[\sqrt{n}\ \right] + 1$$

至少有一个正整数解n.

16. 已知$f(x) = \sum\limits_{i=0}^{100} a_i x^i$, $g(x) = \sum\limits_{j=0}^{100} b_j x^j$是整系数多项式,其中 $a_{100} \neq 0$, $b_{48} \neq 0$,且$a_{48} = a_{49} = \cdots = a_{75} = 0$,$b_{49} = b_{50} = \cdots = b_{75} = 0$,求$f(x)$和$g(x)$的公因式次数的最大值.

17. 确定所有的整数组(i, j, n),满足: $0 \leq i < j \leq n$,且C_n^i与C_n^j互质.

18. 求具有下述性质的所有不为常数的实系数多项式组$(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))$:对于满足$xy - zt = 1$的任意整数组$(x, y, z, t)$,都成立:$f_1(x)f_2(y) - f_3(z)f_4(t) = 1$.