2017 年全国初中数学联合竞赛福建省赛区（初二组）
初赛试题参考答案及评分标准

（2 月 26 日上午 9：30——11：00）

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；解答题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

一、选择题（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1． 如果 $a<b<0$，那么在下列结论中正确的是　　（ **D** ）

A． $a+b<-1$．　　B． $ab<1$．　　C． $\dfrac{a}{b}<1$．　　D． $\dfrac{a}{b}>1$．

解析　利用不等式的基本性质，不等式两边同除以一个负数，不等号要改变方向.

2． 要使关于 x 的方程 $ax-1=x+a$ 无解，则常数 a 的值应取　　（ **A** ）

A． 1.　　B． -1．　　C． ±1.　　D． 0.

解析　$ax-1=x+a\Rightarrow(a-1)x=a+1$, 当 $a-1=0$ 时，无解.

3． 三角形三边长分别为 a,b,c．若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b+c-a}{c}$，则这个三角形必是　　（ **D** ）

A． 等边三角形.　　B． 直角三角形.

C． 等腰直角三角形.　　D． 等腰三角形.

解析　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b+c-a}{c}\Rightarrow\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{b-a}{c}\Rightarrow a=b$．

4． 设 a,b 是实数，若 $a+b=2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b+1}-5$，则 $a-b$ 的值等于　　（ **B** ）

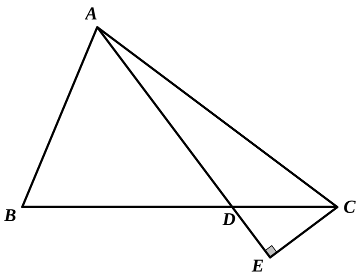
A． -3．　　B． -1．　　C． 1．　　D． 3．

解析　$a+b=2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b+1}-5\Rightarrow(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b+1}-2)^2=0\Rightarrow$ $a=2$，$b=3\Rightarrow a-b=-1$.

5． 如图，在△ ABC 中，$AB=13, BC=21, CA=20$．D 是 BC 上一点，满足 $BC=3CD$, $CE\perp AD$，垂足为点 E．则 CE 长度为　　（ **C** ）

A． $\dfrac{26}{5}$．　　B． $\dfrac{27}{5}$．

C． $\dfrac{28}{5}$．　　D． $\dfrac{29}{5}$．



解析　过点 A 作 BC 边上的高线 AF，由勾股定理易得 $AF=12, BF=5, CF=16, DF=9, AD=15$，再由面积法可得 $CE=\dfrac{2S_{\triangle ADC}}{AD}=\dfrac{CD\cdot AF}{AD}=\dfrac{7\times12}{15}=\dfrac{28}{5}$．

6． 已知 $\dfrac{1}{a}+|a|=\sqrt{5}$，那么代数式 $\dfrac{1}{a}-|a|$ 最大值与最小值之差等于　　（ **B** ）

A． 2．　　B． 4．　　C． 6．　　D． 8.

解析　欲使代数式 $\frac{1}{a}-|a|$ 取到最大值，则 $a>0$，于是

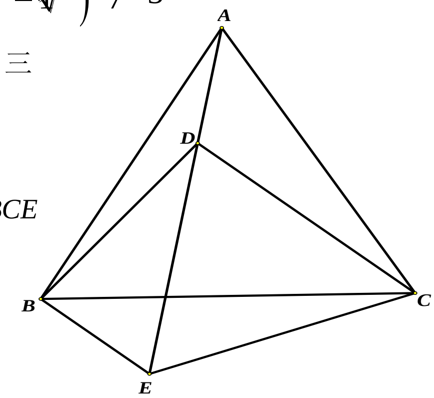
$$\frac{1}{a}+|a|=\frac{1}{a}+a=\sqrt{5}\Rightarrow\left(\frac{1}{a}-a\right)^2=1\Rightarrow\frac{1}{a}-a=\pm1，\ \frac{1}{a}-|a| \text{最大值为 } 1.$$

同理 $\frac{1}{a}-|a|$ 最小值为 -3．因此，最大值与最小值之差为 $1-(-3)=4$．

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

7. 计算 $\frac{1}{1-\sqrt{7}}+\frac{1}{1+\sqrt{7}}=$ <u>$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$</u>．

解析　$\frac{1}{1-\sqrt{7}}+\frac{1}{1+\sqrt{7}}=\frac{1+\sqrt{7}}{\left(1-\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt{7}\right)}+\frac{1-\sqrt{7}}{\left(1+\sqrt{7}\right)\left(1-\sqrt{7}\right)}=-\frac{1}{3}$．



8. 如图，ΔABC、ΔCDE 均为等边三角形，且 A,D,E 三点共线，点 D 在 A,E 之间，$\angle BDE=30^\circ$．则 $\frac{AD}{AE}=$ <u>$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$</u>．

解析　$\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=60°=\angle DCE=\angle BCD+\angle BCE$

$\Rightarrow \angle ACD=\angle BCE\Rightarrow\Delta ACD\cong\Delta BCE$　(*SAS*)

$\Rightarrow AD=BE,\ \angle ADC=\angle BEC=120°,\ \angle BED=60°$

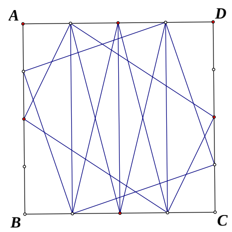
又 $\angle BDE=30°$，故 $AD=BE=\frac{1}{2}DE\Rightarrow AD=\frac{1}{3}AE$．

9．已知互不相等的三个数 a_1,a_2,a_3 满足 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$，$a_1+a_2=a_3$，则 $\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_3}=$ <u>**3**</u>．

解析

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}\Rightarrow a_2^2=a_1a_3\\&a_1+a_2=a_3\Rightarrow a_2=a_3-a_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow(a_3-a_1)^2=a_3a_1\Rightarrow a_1^2+a_3^2=3a_1a_3\Rightarrow\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_3}=3.$$

10．将正方形的每条边 4 等分，取分点(不包括正方形的 4 个顶点)为顶点的平行四边形共有 <u>**19**</u> 个．



解析　以分点为顶点且落在 *AD*，*BC* 上的平行四边形共有 5 个；类似地以分点为顶点且落在 *AB*，CD 上的平行四边形共有 5 个；以分点为顶点且落在正方形四边上的平行四边形共有 3×3=9 个．于是总共有 19 个满足要求的平行四边形．

三、解答题：共 3 小题，第 11 题 20 分，第 12、13 题各 25 分，满分 70 分.

11.　**（本题满分 20 分）**

已知实数 a，b，c 满足：$ab-a-b=bc-b-c=ac-c-a$．

求证：$a^2b+b^2c+c^2a=ab^2+bc^2+ca^2$．

证法一　$a^2b+b^2c+c^2a=ab^2+bc^2+ca^2\Leftrightarrow(a-b)(b-c)(c-a)=0$．　　（5 分）

由 $ab-a-b=bc-b-c$ 可得 $(c-a)(b-1)=0$，

因此，$c-a=0$ 或 $b-1=0$．　　（10 分）

若 $c-a=0$, 则 $c=a$, 命题成立. （15 分）

若 $c-a\neq 0$, 则有 $b-1=0$, 即 $b=1$.

再由条件可知 $ac-c-a=bc-b-c=-1$，

即 $(c-1)(a-1)=0$，从而 $c=1$ 或 $a=1$. （18 分）

因此, a,b,c 中至少有两个相等, 故命题成立! （20 分）

证法二 $a^2b+b^2c+c^2a=ab^2+bc^2+ca^2 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=0$. （5 分）

令 $ab-a-b=bc-b-c=ac-c-a=k$，则

$$(a-1)(b-1)=(b-1)(c-1)=(c-1)(a-1)=k+1,$$

因此 $[(a-1)(b-1)(c-1)]^2=(k+1)^3$，

即当 $k\geq -1$ 时， $(a-1)(b-1)(c-1)=\pm(k+1)^{\frac{3}{2}}$. （10 分）

若 $k>-1$ 时，即 $k+1\neq 0$

所以 $a-1=\dfrac{(a-1)(b-1)(c-1)}{(b-1)(c-1)}=\dfrac{\pm(k+1)^{\frac{3}{2}}}{k+1}=\pm(k+1)^{\frac{1}{2}}$,

同理 $b-1=c-1=\pm(k+1)^{\frac{1}{2}}$，

从而 $a=b=c=\pm(k+1)^{\frac{1}{2}}+1$. （15 分）

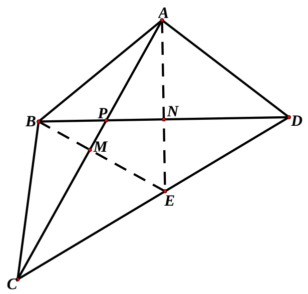
若 $k=-1$，则有 $(a-1)(b-1)=(b-1)(c-1)=(c-1)(a-1)=0$ ，

于是 $a=1$ 或 $b=1$ 或 $c=1$，且 a,b,c 中至少有两个等于 1. （18 分）

综上, 可知 a,b,c 中至少有两个相等，从而结论成立. （20 分）

12. **（本题满分 25 分）**

如图，在凸四边形 $ABCD$ 中， $AB=BC=AD$， $\angle ABC=2\angle ADC$, 对角线 AC 与 BD 交于点 P. 求证： $PC=PD$.



证法一 过 B 作 $BE\perp AC$, 交 AC 于 M, 交 CD 于 E, 连 AE. （5 分）

由于 $BA=BC$， $BE\perp AC$，则直线 BE 为线段 AC 的垂直平分线，因此有

$$\angle CEB=\angle BEA, \qquad ①$$

且有

$$\angle EBA=\frac{1}{2}\angle CBA=\angle ADE. \qquad （10 分）$$

又由于 $AB=AD$, 则 $\angle ABD=\angle ADB$ ，因此，$\angle EBD=\angle EDB$, 由此可知，直线 AE 为线段 BD 的垂直平分线，记垂足为 N，因此，有

$$\angle BEA=\angle AED. \qquad ② \qquad （15 分）$$

于是，由式①、②便得到

$$\angle CEB=\angle BEA=\angle AED=60^0. \qquad （20 分）$$

另外，在 ΔCME 和 ΔDNE 中由于 $\angle EMC=\angle END=90^0$， $\angle CEB=\angle AED=60^0$，故

$\angle PCE=\angle PDE=30^0$，

从而在ΔPCD中便得到$PC=PD$. （25 分）

证法二 设$\angle ABC$的平分线分别交AC、CD于点M，E. 连接AE交BD于点N. 由于$AB=BC$，$\angle ABC=2\angle ADC$，于是有

$$\angle ABE=\angle CBE=\angle ADC.$$ （5 分）

由$AB=BC=AD$可知，ΔABC与ΔABD都是等腰三角形，从而

$$\angle BCA=\angle BAC, \angle ABD=\angle ADB,$$

且BE垂直平分AC. 自然也有$\angle CEB=\angle AEB$. （10 分）

注意到

$$\angle ABE=\angle ABD+\angle EBD=\angle ADC=\angle ADB+\angle EDB,$$

由此可知$\angle EBD=\angle EDB$，即$EB=ED$. 因此$\Delta ABE\cong\Delta ADE$. （15 分）

从而有$\angle BAE=\angle DAE$，$\angle BEA=\angle DEA$，AE垂直平分BD. 因此

$$\angle CEB=\angle AEB=\angle AED=60^\circ.$$ （20 分）

又由于

$$\angle MAE=90^\circ-\angle AEM=90^\circ-60^\circ=30^\circ=\angle MCE, \angle APN=90^\circ-30^\circ=60^\circ,$$

所以$\angle PDC=\angle APD-\angle PCD=60^\circ-30^\circ=30^\circ=\angle PCD$，故

$PC=PD$. （25 分）

13. **（本题满分 25 分）**

设x为实数，记$\{x\}=x-[x]$（$[x]$表示不超过x的最大整数)，求方程

$2017x+\{x\}=\dfrac{1}{2017}$的实根.

解 因为$x=\{x\}+[x]$，于是原方程可化为

$$2017[x]+2018\{x\}=\frac{1}{2017}.$$ （*） (5 分)

注意到$0\le\{x\}=x-[x]<1$， 于是

$$2017[x]\le 2017[x]+2018\{x\}<2017[x]+2018,$$ (10 分)

将（*）代入上式得$2017[x]\le\dfrac{1}{2017}<2017[x]+2018$，故

$$\frac{1}{2017}-2018<2017[x]\le\frac{1}{2017}.$$

注意到$2017[x]$是 2017 的整数倍，所以只能有$[x]=0$或$[x]=-1$. （15 分）

当$[x]=0$时，$x=\{x\}=\dfrac{1}{2017\times 2018}$.

当$[x]=-1$时，$2018\{x\}=\dfrac{1}{2017}+2017=\dfrac{1+2017^2}{2017}$，即$\{x\}=\dfrac{1+2017^2}{2017\times 2018}$， (20 分)

因此$x=-1+\dfrac{1+2017^2}{2017\times 2018}=\dfrac{1+2017^2-2017\times 2018}{2017\times 2018}=-\dfrac{2016}{2017\times 2018}$. （25 分）