周期性通关 50 题 （含答案）

1. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=x$.

（1）求 $f(\pi)$ 的值；

（2）当 $-4\le x\le 4$ 时，求 $f(x)$ 的图象与 x 轴所围成图形的面积；

（3）写出在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)$ 的单调区间.

2. 设函数 $f(x)$ 在定义域 **R** 上总有 $f(x)=-f(x+2)$ ，且当 $-1<x\le 1$ 时， $f(x)=x^2+2$.

（1）当 $3<x\le 5$ 时，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）判断函数 $f(x)$ 在 $(3,5]$ 上的单调性，并予以证明.

3. 设函数 $f(x)$ 是奇函数且周期为 3，$f(-1)=-1$，求 $f(2008)$.

4. 已知 $f(x)$ 是奇函数，又是周期为 6 的周期函数，且 $f(-1)=1$，求 $f(-5)$ 的值.

5. 设 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，且 $f(x+3)=-f(x)$，求 $f(1998)$ 的值.

6. 设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意的 x_1，$x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

（1）求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 及 $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

（2）证明 $f(x)$ 是周期函数.

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且对任意实数有 $f(x+1)=f(1-x)$ 成立.

（1）证明：$f(x)$ 是周期为 4 的周期函数；

（2）若 $f(x)=\sqrt{x}(0<x\leq 1)$，求 $x\in[-5,-4]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，并且满足 $f(x+2)=f(x-2)$，当 $2\leq x\leq 3$ 时，$f(x)=x$，求 $f\left(\frac{211}{2}\right)$.

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且满足 $f(x+2)=f(x-2)$，又 $f'(1)=5$，试求 $f'(15)$ 的值.

10. 函数 $f(x)$ 在 **R** 上有意义，且满足：（1） $f(x)$ 是偶函数；（2） $f(0)=999$ ；（3） $g(x)=f(x-1)$ 是奇函数，求 $f(2008)$.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且对于任意一个 x 的值，都有 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$．求证：$f(x)$ 一定是周期函数.

12. 函数 $f(x)=\frac{A}{2}-\frac{A}{2}\sin(2\omega x+2\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$, 且 $y=f(x)$ 的最大值为 2．其图象相邻两对称轴间的距离为 2，并过点 $(1,2)$.

（1）求 φ.

（2）计算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2012)$.

13. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，对任意实数 x 有 $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=-f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ 成立.

（1）证明 $y=f(x)$ 是周期函数，并指出其周期；

（2）若 $f(1)=2$，求 $f(2)+f(3)$ 的值；

（3）若 $g(x)=x^2+ax+3$，且 $y=|f(x)|\cdot g(x)$ 是偶函数，求实数 a 的值.

14. 判断下列命题的真假.

①空间中两条不平行的直线一定相交；

②垂直于同一个平面的两个平面互相垂直；

③每一个周期函数都有最小正周期；

④两个无理数的乘积一定是无理数；

⑤ 若 $A \nsubseteq B$，则 $A\cap B\neq B$；

⑥ 若 $m>1$，则方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根；

⑦ 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$，若 $a\neq c$ 或 $b\neq d$，则 $a+b\neq c+d$；

⑧已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$，若 $a+b\neq c+d$，则 $a\neq c$ 或 $b\neq d$.

15. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.

（1）若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$，求 x 的取值范围；

（2）若 $g(x)$ 是偶函数，且 $g(x+2)=g(x)$，当 $0\leq x\leq 1$ 时，$g(x)=f(x)$，求函数 $y=g(x)(x\in[1,2])$ 的反函数.

16. 已知函数 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$，其中 a，b，α，β 都是非零实数，又知 $f(2011)=-1$，求 $f(2012)$ 的值.

17. 已知 $f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，求：

（1）$f(x)$ 的最小正周期及对称轴方程；

（2）$f(x)$ 的单调递增区间；

（3）若方程 $f(x)-m+1=0$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有解，求实数 m 的取值范围．

18. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足 $f(x+2)=-f(x)$．

（1）求证：$f(x)$ 是周期函数；

（2）若 $f(x)$ 为奇函数，且当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$，求使 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 在 $[0,2014]$ 上的所有 x 的个数．

19. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对任意实数 x，恒有 $f(x+2)=-f(x)$．当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2x-x^2$．

（1）求证：函数 $f(x)$ 恒有 $f(x+4)=f(x)$ 成立；

（2）当 $x\in[2,4]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式；

（3）计算 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2015)$．

20. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+4)=f(x)$ 成立，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=-x^2+1$．

（1）当 $x\in(2,6)$ 时，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求不等式 $f(x)>-1$ 在区间 $(2,6)$ 上的解集．

21. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 2 为最小正周期的周期函数．当 $-1 \le x < 1$ 时，$y = f(x)$ 的表达式是幂函数，且经过点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$．求函数在 $[2k-1,2k+1)(k \in \mathbf{Z})$ 上的表达式．

22. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且满足① $f(x)$ 是偶函数；② $f(0) = 2005$；③ $g(x) = f(x-1)$ 是奇函数；求 $f(2005)$ 的值．

23. 已知函数 $f(x)$ 对实数 $x \in \mathbf{R}$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0$，$f(x-1) = f(x+1)$，若当 $x \in [0,1)$ 时，$f(x) = a^x + b(a > 0,a \ne 1)$，$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}$．

（1）求 $x \in [-1,1]$ 时，$f(x)$ 的解析式；

（2）求方程 $f(x) - |\log_4 x| = 0$ 的实数解的个数．

24. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且它的图象关于直线 $x = 1$ 对称．

（1）求 $f(0)$ 的值；

（2）证明：函数 $f(x)$ 是周期函数；

（3）若 $f(x) = x \ (0 < x \le 1)$，求当 $x \in \mathbf{R}$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式，并画出满足条件的函数 $f(x)$ 至少一个周期的图象．

25. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x-1$，

（1）求证：$f(x)$ 是周期函数；

（2）当 $x\in[1,2]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式；

（3）计算 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2013)$ 的值．

26. 已知 a 为非零常数，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，有 $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}(f(x)\neq0)$，试判断 $f(x)$ 是否为周期函数，并证明你的结论．

27. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{f(x)}$，当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)=\left|x^2-2x+\frac{1}{2}\right|$，若函数 $y=f(x)-a$ 在区间 $[-3,4]$ 上有 10 个零点（互不相同），则实数 a 的取值范围是________．

28. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+3)\leq f(x)+3$ 和 $f(x+2)\geq f(x)+2$，设 $g(x)=f(x)-x$．

（1）求证：$g(x)$ 是周期函数；

（2）如果 $f(998)=1002$，求 $f(2000)$ 的值．

29. 已知 $f(x)$ 为定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数，对 $k\in\mathbf{Z}$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$，已知 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$．

（1）求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式；

（2）对自然数 k，求集合 $M_k=\{a|$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根 $\}$．

30. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，试证：$f(x)$ 为周期函数.

31. 确定下列函数的最小正周期：

（1）$y=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}x\right)$；

（2）$y=\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$；

（3）$y=\sin 2x+\cos 2x$；

（4）$y=\tan x+\frac{1}{\tan x}$.

32. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x-4)$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=2^x+\frac{1}{5}$，求 $f(\log_2 20)$ 的值.

33. 已知 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数，且 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=1-\sin x$，求当 $x\in\left[\frac{5\pi}{2},3\pi\right]$ 时 $f(x)$ 的解析式.

34. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且它的图象关于直线 $x=1$ 对称.

（1）求证：$f(x)$ 是周期为 4 的周期函数;

（2）若 $f(x)=\sqrt{x}(0<x\leq 1)$，求 $x\in[-5,-4]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

35. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=6$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，求 a_{2010} 的值.

36. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足 $f(x+2)=-f(x)$.

（1）求证：$f(x)$ 是周期函数；

（2）若 $f(x)$ 为奇函数，且当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$，求在 $[0,2014]$ 上使 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 的所有 x 的个数.

37. 已知 n 为正整数，规定 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，且 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 2.\end{cases}$

（1）解不等式 $f(x)\le x$；

（2）设集合 $A=\{0,1,2\}$，对任意 $x\in A$，证明：$f_3(x)=x$；

（3）试求 $f_{2012}\left(\frac{8}{9}\right)$.

38. 已知 $f(k)=\sin\frac{k\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（1）求证：$f(1)+f(2)+\cdots+f(8)=f(9)+f(10)+\cdots+f(16)$；

（2）求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2014)$ 的值.

39. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 4 的奇函数，当 $-2<x\le -1$ 时，$f(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x+1$，求当 $2\le x\le 3$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

40. 已知函数 $f(x)$ 定义在自然数集上，且对任意 $x\in\mathbf{N}^*$ 都有 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，其中 $f(1)=2008$．问 $f(x)$ 是不是周期函数?若是周期函数，求出它的一个周期，并求 $f(2008)$．

41. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(-1)=0$，且 $4x\le f(x)\le 2(x^2+1)$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立．

（1）求 $f(1)$ 的值及 $f(x)$ 的表达式；

（2）设 $g(x)=\frac{x^2-1}{f(x)}$ 定义域为 D，现给出一个数学运算程序：$x_1\to x_2=g(x_1)\to x_3=g(x_2)\to\cdots x_n=g(x_{n-1})$，按照这个运算规则，若给出 $x_1=\frac{7}{3}$，请你写出满足上述条件的集合 $D=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 的所有元素．

42. 已知定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 有最小正周期 2，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的解析式；

（2）判断 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性；

（3）当 λ 取何值时，关于 x 的方程 $f(x)=\lambda$ 在 $x\in(-1,1)$ 上有实数解?

43. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-x^2, & x\in[0,1]\\ -\frac{\sqrt{5}}{5}f(x-1), & x\in[1,3]\end{cases}$.

（1）求 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 及 $x\in[2,3]$ 时函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若 $f(x)\le\frac{k}{x}$ 对任意 $x\in(0,3]$ 恒成立，求实数 k 的最小值．

44. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.

（1）若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$，求 x 的取值范围；

（2）若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $0\le x\le 1$ 时，有 $g(x)=f(x)$，求函数 $y=g(x)(x\in[1,2])$ 的反函数.

45. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(-1)=0$，且 $4x\le f(x)\le 2(x^2+1)$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

（1）求 $f(1)$ 的值及 $f(x)$ 的表达式；

（2）设 $g(x)=\frac{x^2-1}{f(x)}$ 定义域为 D，现给出一个数学运算程序：$x_1\to x_2=g(x_1)\to x_3=g(x_2)\to\cdots\cdots\to x_n=g(x_{n-1})$，按照这个运算规则，若给出 $x_1=\frac{7}{3}$，请你写出满足上述条件的集合 $D=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n\}$ 的所有元素.

46. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$.

（1）试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性.

（2）试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005,2005]$ 上的根的个数，并证明你的结论.

47. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x 均有 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

（1）若 $k=-1$，函数 $f(x)$ 是否具有周期性?若是，求出其周期；

（2）在（1）的条件下，又知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$，则方程 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 在区间 $[0,2016]$ 上有多少个解?（写出结论，不需过程）

（3）若 k 为负常数，且当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=x(x-2)$，求 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的解析式，并求 $f(x)$ 的最小值与最大值.

48. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且 $T=5$ 的周期函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=3x^{4-3n}(n\in\mathbf{N}^*)$，当 $x\in[1,4]$ 时，$f(x)=\log_a x+b$，又函数 $y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数且在区间 $[0,1]$ 上单调递增.

（1）求函数 $y=f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的解析式；

（2）求函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解析式.

49. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1-a & (x\geq 0)\\ f(x+2) & (x<0)\end{cases}$.

（1）若 $a=-8$，当 $-6\leq x\leq 5$ 时，求 $|f(x)|$ 的最大值；

（2）对于任意的实数 $a(-2\leq a\leq 4)$，都有一个最大的正数 $M(a)$，使得当 $x\in[0,t]$ 时，$|f(x)|\leq 3$ 恒成立，求 $M(a)$ 的最大值及相应的 a.

50. 如果函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对于定义域内的任意 x，存在实数 a 使得 $f(x+a)=f(-x)$ 成立，则称此函数具有" $P(a)$ 性质".

（1）判断函数 $y=\sin x$ 是否具有" $P(a)$ 性质"，若具有" $P(a)$ 性质"，求出所有 a 的值；若不具有" $P(a)$ 性质"，请说明理由；

（2）设函数 $y=g(x)$ 具有" $P(\pm 1)$ 性质"，且当 $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=|x|$．若 $y=g(x)$ 与 $y=mx$ 交点个数为 2013 个，求 m 的值.

答案

第一部分

1.（1） 由 $f(x+2)=-f(x)$，

得 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

所以 $f(\pi)=f(\pi-4)$，

又由已知可知 $f(\pi-4)=-f(4-\pi)=-(4-\pi)=\pi-4$，

所以 $f(\pi)=\pi-4$.

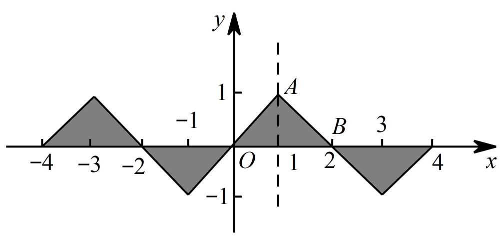
（2） 由 $f(x)$ 是奇函数与 $f(x+2)=-f(x)$，

得 $f[(x-1)+2]=-f(x-1)=f[-(x-1)]$，

即 $f(1+x)=f(1-x)$，

故函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

又当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=x$，且 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于原点对称，则当 $-4\leq x\leq 4$ 时，$f(x)$ 的图象与 x 轴围成的图形如图所示，



设其面积为 S，则 $S=4S_{\triangle OAB}=4\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)=4$.

（3） 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[4k-1,4k+1](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为 $[4k+1,4k+3](k\in\mathbf{Z})$.

2.（1） 因为 $f(x)=-f(x+2)$ ，所以 $f(x+4)=-f(x+2)$ ，故有 $f(x)=f(x+4)$.

又因为 $-1<x\leq 1$ 时， $f(x)=x^2+2$ ，结合当 $3<x\leq 5$ 时， $-1<x-4\leq 1$ ，

所以 $f(x-4)=(x-4)^2+2$.

因此当 $3<x\leq 5$ 时， $f(x)=(x-4)^2+2$.

（2） 因为函数 $f(x)=(x-4)^2+2$ 的对称轴是 $x=4$ ，

所以函数 $f(x)=(x-4)^2+2$ 在 $(3,4]$ 上单调递减，在 $[4,5]$ 上单调递增.

证明如下：

任取 $x_1,x_2\in(3,4]$ ，且 $x_1<x_2$ ，有

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= [(x_1-4)^2+2]-[(x_2-4)^2+2] \\ &= (x_1-x_2)(x_1+x_2-8), \end{aligned}$$

因为 $3<x_1<x_2\leq 4$ ，所以 $x_1-x_2<0$ ， $x_1+x_2-8<0$.

因此 $f(x_1)-f(x_2)>0$ ，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

故函数 $y=f(x)$ 在 $(3,4]$ 上单调递减．同理可证函数在 $[4,5]$ 上单调递增.

3. 由 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(1)=-f(-1)=1$．又因为 $f(x)$ 周期为 3，所以 $f(2008)=f(1)=1$.

4. $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(1)=-f(-1)=-1$，

又 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数，所以 $f(-5)=f(1)=-1$.

5. 因为 $f(x+3)=-f(x)$, 所以

$$\begin{aligned} f(x+6) &= f((x+3)+3) \\ &= -f(x+3) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

故 6 是函数 $f(x)$ 的一个周期. 又 $f(x)$ 是奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，

所以 $f(0)=0$ 从而 $f(1998)=f(6\times 333)=f(0)=0$.

6.（1） 由题意可知，$f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$，所以 $f(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$.

因为 $f(1)=a$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=a^{\frac{1}{4}}$.

（2） 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$.

又由 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(2-x)$.

所以 $f(2+x)=f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，且 2 是它的一个周期.

7.（1） 由 $f(x+1)=f(1-x)$ 可得 $f(-x)=f(x+2)$

又函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，有 $f(-x)=-f(x)$，

故 $f(x+2)=-f(x)$.

从而 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

（2） 由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，有 $f(0)=0$.

$x\in[-1,0)$ 时，$-x\in(0,1]$，$f(x)=-f(-x)=-\sqrt{-x}$，

故 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=-\sqrt{-x}$.

$x\in[-5,-4]$ 时，$x+4\in[-1,0]$.

$f(x)=f(x+4)=-\sqrt{-x-4}$，

从而，$x\in[-5,-4]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-\sqrt{-x-4}$.

8. 由 $f(x+2)=f(x-2)$，可知函数是以 4 为周期的周期函数，且函数 $f(x)$ 为偶函数，

所以 $f\left(\frac{211}{2}\right)=f(105.5)=f(4\times 27-2.5)=f(-2.5)=f(2.5)$.

又当 $2\le x\le 3$ 时，$f(x)=x$，

所以 $f(2.5)=2.5$，即 $f\left(\frac{211}{2}\right)=2.5$.

9. 因为 $f(x+2)=f(x-2)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，

所以 $f(x)=f(x+2-2)=f(x+2+2)=f(x+4)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立.

所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

对 $f(x)=f(x+4)$ 两边求导得 $f'(x)=(f(x+4))'=f'(x+4)\cdot(x+4)'=f'(x+4)$.

即 $f'(x)$ 也是周期为 4 的周期函数，所以 $f'(15)=f'(16-1)=f'(-1)$.

又因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$.

两边求导得 $(f(-x))'=f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(-x)=f'(x)$.

即 $f'(-x)=-f'(x)$，所以 $f'(x)$ 是奇函数，所以 $f'(15)=f'(-1)=-f'(1)=-5$.

10. 因为 $g(x)=f(x-1)$ 是奇函数，所以 $g(x)=-g(-x)$ ，

所以 $f(-x-1)=-f(x-1)$ ……①

又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x-1)=f(x+1)$ ，

所以 $f(x+1)=-f(x-1)$ ，

可得函数 $f(x)$ 的周期为 4 ，

所以 $f(2008)=f(4\times 502)=f(0)=999$.

11. 因为 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$ ……①.

用 $x+1$ 替换①式中 x，得到 $f(x+1)=f(x)+f(x+2)$ ……②.

用 $x+2$ 替换①式中 x，得到 $f(x+2)=f(x+1)+f(x+3)$ ……③

把②③联立，得

$$\begin{cases} f(x+1)=f(x)+f(x+2) \\ f(x+2)=f(x+1)+f(x+3) \end{cases}$$

所以 $f(x)=-f(x+3)$，即 $f(x+3)=-f(x)$.

所以 $f(x+6)=f[(x+3)+3]=-f(x+3)=-[-f(x)]=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数.

12.（1） 因为 $y=\frac{A}{2}-\frac{A}{2}\sin(2\omega x+2\varphi)$ 的最大值为 2，$A>0$，

所以 $\frac{A}{2}+\frac{A}{2}=2$，即 $A=2$.

又因为其图象相邻两对称轴间的距离为 2，$\omega>0$，

所以 $\frac{1}{2}T=2$，即 $T=4=\frac{2\pi}{2\omega}$,

所以 $\omega=\frac{\pi}{4}$.

所以 $f(x)=\frac{2}{2}-\frac{2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+2\varphi\right)=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x+2\varphi\right)$.

因为 $y=f(x)$ 过点 $(1,2)$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)=-1$，

所以 $\frac{\pi}{2}+2\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $\varphi=k\pi--\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

（2） 由（1）知 $f(x)=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)=1+\sin\frac{\pi}{2}x$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+1+0+1=4$

又因为 $y=f(x)$ 的周期为 4，$2012=4\times 503$，

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2012)=4\times 503=2012$.

13.（1） 由 $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=-f\left(\frac{3}{2}-x\right)$，且 $f(-x)=-f(x)$，

知 $f(3+x)=f\left[\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}+x\right)\right]=-f\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}+x\right)\right]=-f(-x)=f(x)$，

所以 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=3$ 是其一个周期.

（2） 因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，

且 $f(-1)=-f(1)=-2$，又 $T=3$ 是 $y=f(x)$ 的一个周期，

所以 $f(2)+f(3)=f(-1)+f(0)=-2+0=-2$.

（3） 因为 $y=|f(x)|\cdot g(x)$ 是偶函数，

且 $|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$，所以 $|f(x)|$ 为偶函数.

故 $g(x)=x^2+ax+3$ 为偶函数，即 $g(-x)=g(x)$ 恒成立，

于是 $(-x)^2+a(-x)+3=x^2+ax+3$ 恒成立.

于是 $2ax=0$ 恒成立，所以 $a=0$.

14. ① 假命题，还可能是异面直线；

②假命题，这两个平面可以平行也可以相交，不一定垂直；

③假命题，常数函数是周期函数，但没有最小正周期；

④假命题，反例：$\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=2-1=1$.

⑤ 假命题，反例：$A=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，满足 $A\not\subseteq B$，且 $A\cap B=B$；

⑥真命题，$m>1$ 时，$\Delta=(-2)^2-4m<0$，则方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根；

⑦假命题，如 $a=1$，$b=3$，$c=d=2$ 即为反例；

⑧真命题，“已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$，若 $a+b\neq c+d$，则 $a\neq c$ 或 $b\neq d$”的逆否命题为：若 $a=c$ 且 $b=d$，则 $a+b=c+d$，为真命题，故原命题也为真命题.

15.（1） 由 $\begin{cases}2-2x>0,\\x+1>0,\end{cases}$ 得 $-1<x<1$.

由 $0<\lg(2-2x)-\lg(x+1)=\lg\frac{2-2x}{x+1}<1$ 得 $1<\frac{2-2x}{x+1}<10$.

因为 $x+1>0$，

所以 $x+1<2-2x<10x+10$，$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.

由 $\begin{cases}-1<x<1,\\-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3},\end{cases}$ 得 $-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.

（2） 当 $x\in[1,2]$ 时，$2-x\in[0,1]$，因此 $y=g(x)=g(x-2)=g(2-x)=f(2-x)=\lg(3-x)$，由单调性可得 $y\in[0,\lg2]$.

因为 $x=3-10^y$，

所以所求反函数是 $y=3-10^x$，$x\in[0,\lg2]$.

16. 因为

$$\begin{aligned}f(2011)&=a\sin(2011\pi+\alpha)+b\cos(2011\pi+\beta)\\&=a\sin(2010\pi+\pi+\alpha)+b\cos(2010\pi+\pi+\beta)\\&=a\sin(\pi+\alpha)+b\cos(\pi+\beta)\\&=-a\sin\alpha-b\cos\beta\\&=-1,\end{aligned}$$

所以 $a\sin\alpha+b\cos\beta=1$.

所以 $f(2012)=a\sin(2012\pi+\alpha)+b\cos(2012\pi+\beta)=a\sin\alpha+b\cos\beta=1$.

17.（1） $T=\frac{2\pi}{|w|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

令 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

（2） 因为 $f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调减区间，

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\frac{\pi}{8}+k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

（3） 方程 $f(x)-m+1=0$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有解，等价于两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=m-1$ 的图象有交点.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$,

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le1$，

即得 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{5}{2}$,

所以 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\le m-1\le\frac{5}{2}$

所以 m 的取值范围为 $\left[3-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7}{2}\right]$.

18.（1） 因为 $f(x+2)=-f(x)$，

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

（2） 当 $0\le x\le1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$，

设 $-1\le x\le0$，则 $0\le-x\le1$，

所以 $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)=-\frac{1}{2}x$.

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $-f(x)=-\frac{1}{2}x$，即 $f(x)=\frac{1}{2}x$.

故 $f(x)=\frac{1}{2}x(-1\le x\le1)$.

又设 $1<x<3$，则 $-1<x-2<1$，

所以 $f(x-2)=\frac{1}{2}(x-2)$.

又因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数

所以 $f(x-2)=f(x+2)=-f(x)$，所以 $-f(x)=\frac{1}{2}(x-2)$，

所以 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(1<x<3)$.

所以 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x,-1\le x\le1,\\-\frac{1}{2}(x-2),1<x<3.\end{cases}$

由 $f(x)=-\frac{1}{2}$，解得 $x=-1$.

因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

所以 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 的所有 $x=4n-1(n\in\mathbf{Z})$.

令 $0\le4n-1\le2014$，则 $\frac{1}{4}\le n\le\frac{2015}{4}$.

又因为 $n\in\mathbf{Z}$，所以 $1\le n\le503(n\in\mathbf{Z})$，

所以在 $[0,2014]$ 上共有 503 个 x 使 $f(x)=-\frac{1}{2}$.

19.（1） 因为 $f(x+2)=-f(x)$，

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$.
所以 $f(x)$ 恒有 $f(x+4)=f(x)$ 成立.

（2） 当 $x\in[-2,0]$ 时，$-x\in[0,2]$，由已知得 $f(-x)=2(-x)-(-x)^2=-2x-x^2$.
又 $f(x)$ 是奇函数，
所以 $f(-x)=-f(x)=-2x-x^2$，
所以 $f(x)=x^2+2x$.
又当 $x\in[2,4]$ 时，$x-4\in[-2,0]$，
所以 $f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)$.
又 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$.
所以 $f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8$.
所以 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=x^2-6x+8$.

（3） $f(0)=0$，$f(2)=0$，$f(1)=1$，$f(3)=-1$.
又 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$.
所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=\cdots=f(2012)+f(2013)+f(2014)+f(2015)=0$.
所以 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2015)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0+1+0+(-1)=0$.

20. （1） 因为 $f(x)=f(x+4)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.
又 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=f(4)=0$.
由 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=-x^2+1$，得 $x\in(-2,0)$ 时，$f(x)=x^2-1$.
当 $x\in(2,4)$ 时，$x-4\in(-2,0)$，则 $f(x-4)=(x-4)^2-1=f(x)$.
当 $x\in(4,6)$ 时，$x-4\in(0,2)$，则 $f(x-4)=-(x-4)^2+1=f(x)$.
故当 $x\in(2,6)$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}(x-4)^2-1, & x\in(2,4),\\ 0, & x=4,\\ -(x-4)^2+1, & x\in(4,6).\end{cases}$

（2） 当 $x\in(2,6)$ 时，由 $f(x)>-1$，
得 $\begin{cases}2<x<4,\\ (x-4)^2-1>-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4<x<6,\\ -(x-4)^2+1>-1,\end{cases}$ 或 $x=4$.
解得 $2<x<4+\sqrt{2}$.
所以不等式 $f(x)>-1$ 在 $(2,6)$ 上的解集为 $\left(2,4+\sqrt{2}\right)$.

21. 设在 $[-1,1)$ 上，$f(x)=x^n$，由点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ 在函数图象上，求得 $n=3$.
令 $x\in[2k-1,2k+1)$，则 $x-2k\in[-1,1)$，
所以 $f(x-2k)=(x-2k)^3$. 又 $f(x)$ 周期为 2，
所以 $f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^3$. 即 $f(x)=(x-2k)^3(k\in\mathbf{Z})$.

22.
$$g(-x)=f(-x-1)=-g(x)=-f(x-1),$$
$$f(-x-1)=-f(x-1),$$
令
$$y=x+1,$$

则

$$f(-y)=-f(y-2).$$

即有

$$f(x)+f(x-2)=0,f(x)=-f(x-2)=f(x-4),$$

故 $f(x)$ 的周期是 4 ，所以

$$f(2005)=f(1).$$

又

$$f(1)+f(1-2)=0,f(x)\text{是偶函数},$$

所以

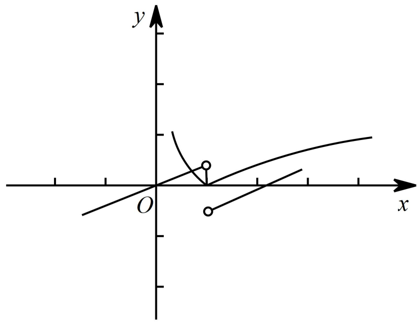
$$f(1)=f(-1)=0.$$

综上，

$$f(2005)=0.$$

23.（1） 因为 $f(x)+f(-x)=0$，
所以 $f(0)=0$，即 $b=-1$，
又因为 $f(x-1)=f(x+1)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=1-\sqrt{2}$，
所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\sqrt{a}=1-\sqrt{2}$，
所以 $a=2$，
所以当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^{x}-1$，
所以当 $x\in(-1,0]$ 时，$-x\in[0,1)$，
所以 $f(-x)=2^{-x}-1$，
所以 $f(x)=-f(-x)=1-2^{-x}$.
因为 $f(x)+f(-x)=0$，$f(x-1)=f(x+1)$，
所以 $f(1)=f(-1)=0$，
所以 $f(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\in(-1,0]\\ 0, & x=-1\text{ 或 }1\\ 2^{x}-1, & x\in[0,1)\end{cases}$.

（2） 因为 $f(x)+f(-x)=0$，$f(x-1)=f(x+1)$，
所以 $f(x+2)=f(x)$，
所以 $f(x)$ 是奇函数，且以 2 为周期.
方程 $f(x)-|\log_4 x|=0$ 的实数解的个数也就是函数 $y=f(x)$ 和 $y=|\log_4 x|$ 的交点的个数.
在同一直角坐标系中作出这两个函数的图象，由图象得交点个数为 2，



所以方程的实数解的个数为 2．

24.（1）$\because$ $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\therefore$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=-f(x)$，

令 $x=0$，则 $f(-0)=-f(0)$，$\therefore$ $f(0)=0$．

（2）$\because$ $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\therefore$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=-f(x)$，$\because$ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(1+x)=f(1-x)$，$\therefore$ 用 $1+x$ 代 x 得，$f(2+x)=f[1-(1+x)]=f(-x)=-f(x)$，

$\therefore$ $f[2+(2+x)]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$．

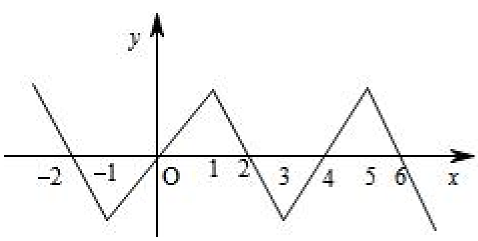
即 $f(4+x)=f(x)$．$\therefore$ $f(x)$ 是周期函数，4 是其周期．

（3）当 $x\in[-1,3)$ 时，$f(x)=\begin{cases}x(-1\le x\le 1)\\-x+2(1<x<3)\end{cases}$，

当 $4k-1\le x\le 4k+1$ 时，$f(x)=x-4k$，$k\in\mathbf{Z}$；

当 $4k+1<x<4k+3$ 时，$f(x)=-x+2-4k$，$k\in\mathbf{Z}$．

$\therefore$ $f(x)=\begin{cases}x-4k,(4k-1\le x\le 4k+1)\\-x+2-4k,(4k+1<x<4k+3)\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 图象如下：



25.（1）因为函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，

因为函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，则 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(4+x)=f[(2+x)+2]=-f(2+x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数．

（2）当 $x\in[1,2]$ 时，$2-x\in[0,1]$，

又 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

则 $f(x)=f(2-x)=2^{2-x}-1$，$x\in[1,2]$．

（3）因为 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$，

$f(3)=f(-1)=-f(1)=-1$，

又 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数．

所以 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2013)$

$=f(2012)+f(2013)=f(0)+f(1)=1$.

26. $f(x)$ 是周期函数，$4a$ 为它的一个周期.

证明如下：

$f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$,

故 $f(x+4a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$.

27. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

28.（1）

$$g(x)=f(x)-x$$

可得

$$g(x+2)=f(x+2)-x-2,$$
$$g(x+3)=f(x+3)-x-3$$

再以 $f(x+3)\leq f(x)+3$ 和 $f(x+2)\geq f(x)+2$ 代换，

可得

$$g(x+2)\geq f(x)+2-x-2=f(x)-x=g(x) \quad \cdots\cdots①$$
$$g(x+3)\leq f(x)+3-x-3=f(x)-x=g(x) \quad \cdots\cdots②$$

由①②可得

$$g(x+6)\geq g(x+4)\geq g(x+2)\geq g(x),$$
$$g(x+6)\leq g(x+3)\leq g(x)$$

于是

$$g(x+6)=g(x)$$

即 $g(x)$ 是周期函数（6 是它的一个周期）.

（2） $g(2000)=g(6\times 167+998)=g(998)$，即 $f(2000)-2000=f(998)-998$，

所以 $f(2000)=f(998)+1002=1002+1002=2004$.

29.（1） 由题意 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 2 为周期的函数，

由于对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$f(x)=f(x\pm 2k)(k\in\mathbf{Z}).$$

当 $2k-1<x\leq 2k+1$ 时，有

$$-1<x-2k\leq 1,$$

所以

$$f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2, x\in I_k.$$

（2） 当 $x\in\mathbf{N}$ 且 $x\in I_k$ 时，

由（1）的结论可得：$(x-2k)^2=ax$，

化简有

$$x^2-(4k+a)x+4k^2=0,$$

解方程，可得

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(4k + a - \sqrt{a(a+8k)}\right), \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(4k + a + \sqrt{a(a+8k)}\right),
\end{aligned}
$$

所以方程在区间 I_k 上恰有两个不相等实根当且仅当：

$$
\begin{cases}
a(a+8k) > 0, \\
2k-1 < \frac{1}{2}\left(4k + a - \sqrt{a(a+8k)}\right), \\
2k+1 \geq \frac{1}{2}\left(4k + a + \sqrt{a(a+8k)}\right),
\end{cases}
$$

解得集合 M_k 为

$$
M_k = \left\{a \mid \quad 0 < a \leq \frac{1}{2k+1}\right\}.
$$

30. 因为 $f(x+2a) = f[(x+a)+a] = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2}$，而

$$
\begin{aligned}
[f(x+a)]^2 &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} + f(x) - [f(x)]^2.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(x+a) - [f(x+a)]^2 &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} + f(x) - [f(x)]^2\right) \\
&= \frac{1}{4} - f(x) + [f(x)]^2 = \left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

因此易知

$$
f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + |f(x) - \frac{1}{2}| = f(x).
$$

即 $f(x)$ 为周期函数，且 $2a$ 是它的一个周期.

31.（1） $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{|-\frac{2}{3}|} = 3\pi$

（2） $\mathrm{T} = \frac{\pi}{3}$

（3） $y = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

（4） $y = \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$，周期 $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

32.

$$
\begin{aligned}
f(\log_2 20) = f(\log_2 20 - 4) &= f\left(\log_2 \frac{5}{4}\right) = -f\left(-\log_2 \frac{5}{4}\right) = -f\left(\log_2 \frac{4}{5}\right) \\
&= -\left[2^{\log_2 \frac{4}{5}} + \frac{1}{5}\right] = -\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) = -1.
\end{aligned}
$$

33. $x \in \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right]$ 时，$3\pi - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x) = 1 - \sin x$,

所以 $f(3\pi - x) = 1 - \sin(3\pi - x) = 1 - \sin x$.

又因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数，

所以 $f(3\pi-x)=f(-x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=1-\sin x, x\in\left[\frac{5\pi}{2},3\pi\right]$.

34.（1） 证明：由函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

有 $f(x+1)=f(1-x)$，

即有 $f(-x)=f(x+2)$.

又函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

故有 $f(-x)=-f(x)$.

故 $f(x+2)=-f(x)$.

从而 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

（2） 由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，有 $f(0)=0$.

$x\in[-1,0)$ 时，$-x\in(0,1]$，$f(x)=-f(-x)=-\sqrt{-x}$.

故 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=-\sqrt{-x}$.

$x\in[-5,-4]$ 时，$x+4\in[-1,0]$，

$f(x)=f(x+4)=-\sqrt{-x-4}$.

从而，$x\in[-5,-4]$ 时，函数 $f(x)=-\sqrt{-x-4}$.

35. 设 $a_n=f(n)$，

则 $f(n+2)=f(n+1)-f(n)$，$f(n+3)=f(n+2)-f(n+1)$.

将这两个等式相加可得 $f(n+3)=f(n+1)-f(n)-f(n+1)=-f(n)$.

所以 $f(n+6)=-f(n+3)=f(n)$，则函数 $f(n)$ 是以 6 为周期的周期函数.

所以 $f(2010)=f(6\times335)=f(6)$，可解得 $a_{2010}=a_6=-5$.

36.（1） 因为 $f(x+2)=-f(x)$，

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

（2） 当 $0\le x\le1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$.

若 $-1\le x\le0$，则 $0\le-x\le1$，$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)=-\frac{1}{2}x$.

因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以当 $-1\le x\le0$ 时，$-f(x)=-\frac{1}{2}x$，

即当 $-1\le x\le0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$.

故 $f(x)=\frac{1}{2}x(-1\le x\le1)$.

若 $1<x<3$，则 $-1<x-2<1$，$f(x-2)=\frac{1}{2}(x-2)$.

因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

所以 $f(x-2)=f(x+2)=-f(x)$，

所以当 $1<x<3$ 时，$-f(x)=\frac{1}{2}(x-2)$，

即 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(1<x<3)$.

所以在 $[-1,3)$ 上，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & -1\le x\le 1\\ -\frac{1}{2}(x-2), & 1<x<3\end{cases}$

令 $f(x)=-\frac{1}{2}(x\in[-1,3))$，解得 $x=-1$.

因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

所以使 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 的所有 $x=4n-1(n\in\mathbf{Z})$.

令 $0\le 4n-1\le 2014(n\in\mathbf{Z})$，则 $\frac{1}{4}\le n\le\frac{2015}{4}(n\in\mathbf{Z})$.

所以 $1\le n\le 503(n\in\mathbf{Z})$，

所以在 $[0,2014]$ 上共有 503 个 x 使 $f(x)=-\frac{1}{2}$.

37.（1） 当 $0\le x\le 1$ 时，由 $2(1-x)\le x$ 得 $x\ge\frac{2}{3}$，故 $\frac{2}{3}\le x\le 1$；

当 $1<x\le 2$ 时，由 $x-1\le x$，求得 $x\in\mathbf{R}$，故 $1<x\le 2$.

综上，可知 $\frac{2}{3}\le x\le 2$.

（2） 由题可知，$f(0)=2$，$f(1)=0$，$f(2)=1$．当 $x=0$ 时，

$f_3(0)=f[f_2(0)]=f\{f[f_1(0)]\}=f\{f[f(0)]\}=f[f(2)]=f(1)=0$.

同理可求得，当 $x=1$ 时，$f_3(1)=1$；当 $x=2$ 时，$f_3(2)=2$.

故当 $x\in A$ 时，恒有 $f_3(x)=x$.

（3）

$$\begin{aligned}f_1\left(\frac{8}{9}\right)=2\times\left(1-\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{9};f_2\left(\frac{8}{9}\right)=f\left[f_1\left(\frac{8}{9}\right)\right]=f\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{14}{9};f_3\left(\frac{8}{9}\right)=f\left[f_2\left(\frac{8}{9}\right)\right]=f\left(\frac{14}{9}\right)=\frac{14}{9}-1\\=\frac{5}{9};f_4\left(\frac{8}{9}\right)=f\left[f_3\left(\frac{8}{9}\right)\right]=f\left(\frac{5}{9}\right)=2\times\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{8}{9};f_5\left(\frac{8}{9}\right)=f\left[f_4\left(\frac{8}{9}\right)\right]=f\left(\frac{8}{9}\right)\\=f_1\left(\frac{8}{9}\right)\end{aligned}$$

………

这样便进入一个周期循环中，最小正周期为 4，

所以 $f_{4k+r}\left(\frac{8}{9}\right)=f_r\left(\frac{8}{9}\right)$，$k\in\mathbf{N}$，$r\in\mathbf{N}^*$，

所以 $f_{2012}\left(\frac{8}{9}\right)=f_{502\times4+4}\left(\frac{8}{9}\right)=f_4\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{8}{9}$.

38.（1） 因为 $\sin\frac{k\pi}{4}=\sin\left(2\pi+\frac{k\pi}{4}\right)=\sin\frac{(k+8)\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(k)=f(k+8)$，

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)=f(9)+f(10)+\cdots+f(16)$.

（2） 因为 $f(k)$ 是以 8 为一个周期，且 $2014=251\times8+6$，

所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2014)=251[f(1)+f(2)+\cdots+f(8)]+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$.

又因为 $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{4}+\cdots+\sin\frac{8\pi}{4}=0$，

所以

$$\begin{aligned}f(1)+f(2)+\cdots+f(2014)\quad&=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)\\&=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\pi+\sin\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{6\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

39. 当 $2<x\leq 3$ 时，$-2<x-4\leq -1$，故 $f(x)=f(x-4)=2\cos\frac{\pi}{2}(x-4)+1=2\cos\frac{\pi}{2}x+1$．又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-2)=-f(2)$．因为 $f(-2)=f(-2+4)=f(2)$，所以 $f(2)=0$．综上，当 $2\leq x\leq 3$ 时，$f(x)=\begin{cases}0, & x=2\\2\cos\frac{\pi}{2}x+1, & 2<x\leq 3\end{cases}$.

40. 由 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，得 $f(x-1)=f(x)-f(x+1)$．

所以 $f(x+1-1)=f(x+1)-f(x+2)$．

所以 $f(x-1)=-f(x+2)$．

同理 $f(x)=-f(x+3)$，$f(x)=f(x+6)$，

所以 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数．

$f(2008)=f(4)=-f(1)=-2008$．

41.（1） 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，由 $4x\leq f(x)\leq 2(x^2+1)$，

令 $x=1$ 得 $4\leq f(1)\leq 4$，

所以 $f(1)=4$，

联立 $f(-1)=0$，得 $\begin{cases}a+b+c=4,\\a-b+c=0,\end{cases}$

得 $b=2$，$a+c=2$，

又 $ax^2+bx+c\geq 4x$，即 $ax^2-2x+c\geq 0$，对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=4-4ac\leq 0.\end{cases}$

所以有 $(a+c)^2-4ac\leq 0$，即 $(a-c)^2\leq 0$，

所以 $a=1$，$c=1$，

所以 $f(x)=(x+1)^2$．

（2） 由

$$\begin{aligned}g(x)\quad&=\frac{x^2-1}{f(x)}\\&=\frac{x-1}{x+1}\\&=1-\frac{2}{x+1},\end{aligned}$$

由题意 $x_1=\frac{7}{3}$，$x_2=g(x_1)=\frac{2}{5}$，$x_3=g(x_2)=-\frac{3}{7}$，$x_4=g(x_3)=-\frac{5}{2}$，$x_5=g(x_4)=\frac{7}{3}$，

后面的数重复出现，根据集合中元素的互异性，故 $D=\left\{\frac{7}{3},\frac{2}{5},-\frac{3}{7},-\frac{5}{2}\right\}$．

42.（1） 因为 $f(x)$ 是 $x\in\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(0)=0$．

若 $x\in(-1,0)$，则 $-x\in(0,1)$，$f(-x)=\frac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=\frac{2^x}{4^x+1}=-f(x)$，

所以 $f(x)=-\frac{2^x}{4^x+1}$，

所以 $f(x)=\begin{cases}-\frac{2^x}{4^x+1}, & x\in(-1,0)\\ 0, & x=0\\ \frac{2^x}{4^x+1}, & x\in(0,1)\end{cases}$.

（2） 设 $0<x_1<x_2<1$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}}{4^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}}{4^{x_2}+1}=\frac{(2^{x_1}-2^{x_2})+(2^{x_1+2x_2}-2^{x_2+2x_1})}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}=\frac{(2^{x_1}-2^{x_2})(1-2^{x_1+x_2})}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}.$$

因为 $0<x_1<x_2<1$，

所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，$2^{x_1+x_2}>2^0=1$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数.

（3） 因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，

所以 $\frac{2^1}{4^1+1}<f(x)<\frac{2^0}{4^0+1}$，即 $f(x)\in\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$.

同理 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{5}\right)$.

又 $f(0)=0$，

所以当 $\lambda\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$ 或 $\lambda=0$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=\lambda$ 在 $x\in(-1,1)$ 上有实数解.

43. （1） $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{5}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$,

当 $x\in[2,3]$ 时，$x-2\in[0,1]$，

所以 $f(x)=\frac{1}{5}[(x-2)-(x-2)^2]=\frac{1}{5}(x-2)(3-x)$.

（2） ①当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x-x^2$，则对任意 $x\in(0,1]$，$x-x^2\le\frac{k}{x}$ 恒成立，即 $k\ge(x^2-x^3)_{\max}$，

设 $h(x)=x^2-x^3$，则 $h'(x)=2x-3x^2$，令 $h'(x)=0$，可得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$，易得 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 上递增，在 $\left(\frac{2}{3},1\right]$ 上递减，

所以 $h(x)_{\max}=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$;

②当 $x\in(1,2]$ 时，$f(x)=-\frac{\sqrt{5}}{5}[(x-1)-(x-1)^2]=\frac{\sqrt{5}}{5}(x-1)(x-2)<0$，当 $k\ge\frac{4}{27}$ 时，$f(x)\le\frac{k}{x}$ 显然成立；

③当 $x\in(2,3]$ 时，$f(x)=\frac{1}{5}[(x-2)-(x-2)^2]\le\frac{k}{x}$ 恒成立，令 $x-2=t\in[0,1]$，则 $k\ge\frac{1}{5}(t+2)(t-t^2)=g(t)$ 在 $t\in[0,1]$ 恒成立，$g'(t)=-\frac{1}{5}(3t^2+2t-2)$，令 $g'(t)=0$，可得存在 $t_0\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，函数在 $t=t_0$ 时取最大值，而 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时，$h(t)-g(t)=(t^2-t^3)+\frac{1}{5}(t+2)(t^2-t)=\frac{2}{5}t(1-t)(2t-1)\ge0$，

所以 $h(t)_{\max}>g(t)_{\max}$，当 $k\ge\frac{4}{27}$ 时，$k\ge h(t)_{\max}>g(t)_{\max}$ 成立.

综上所述：$k\ge\frac{4}{27}$，

所以 $k_{\min}=\frac{4}{27}$.

44.（1） 由 $\begin{cases}2-2x>0,\\ x+1>0,\end{cases}$ 得

$$-1<x<1.$$

由

$$0<\lg(2-2x)-\lg(x+1)=\lg\frac{2-2x}{x+1}<1,$$

得

$$1<\frac{2-2x}{x+1}<10.$$

因为 $x+1>0$，所以

$$x+1<2-2x<10x+10,$$

解得

$$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}.$$

由 $\begin{cases}-1<x<1,\\ -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3},\end{cases}$ 得

$$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}.$$

（2） 当 $x\in[1,2]$ 时，$2-x\in[0,1]$，因此

$$\begin{aligned}y&=g(x)\\&=g(x-2)\\&=g(2-x)\\&=f(2-x)\\&=\lg(3-x).\end{aligned}$$

由单调性可得 $y\in[0,\lg2]$.

因为 $x=3-10^y$，所以所求反函数是 $y=3-10^x,x\in[0,\lg2]$.

45.（1） 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

由 $4x\leq f(x)\leq2(x^2+1)$，令 $x=1$ 得 $4\leq f(1)\leq4$，

所以 $f(1)=4$

联立 $f(-1)=0$ 得 $\begin{cases}a+b+c=4,\\ a-b+c=0,\end{cases}$

得 $b=2$，$a+c=2$，

又 $ax^2+bx+c\geq4x$，即 $ax^2-2x+c\geq0$，对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4ac\leq0\end{cases}$’

所以有 $(a+c)^2-4ac\leq0$ 即 $(a-c)^2\leq0$，所以 $a=1$，$c=1$，

故 $f(x)=(x+1)^2$.

（2） 由 $g(x)=\frac{x^2-1}{f(x)}=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$，

由题意 $x_1=\frac{7}{3}$，$x_2=g(x_1)=\frac{2}{5}$，$x_3=g(x_2)=-\frac{3}{7}$，$x_4=g(x_3)=-\frac{5}{2}$，$x_5=g(x_4)=\frac{7}{3}$，后面的数重复出现，根据集合的互异性，故 $D=\left\{\frac{7}{3},\frac{2}{5},-\frac{3}{7},-\frac{5}{2}\right\}$.

46.（1） 由 $f(2-x)=f(2+x)$，得函数 $y=f(x)$ 有对称轴 $x=2$，所以 $f(-1)=f(5)$，

因为 $f(x)$ 在闭区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$，所以 $f(5)\neq 0$，
故 $f(1)\neq f(-1)$，即 $f(x)$ 不是偶函数.
又因为 $f(x)$ 在 $[0,7]$ 上只有 $f(1)=f(3)=0$，所以 $f(0)\neq 0$，
从而知函数 $y=f(x)$ 不是奇函数.
故函数是非奇非偶函数.

（2） $\begin{cases}f(2-x)=f(2+x),\\f(7-x)=f(7+x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=f(4-x)\\f(x)=f(14-x)\end{cases}\Rightarrow f(4-x)=f(14-x)\Rightarrow f(x)=f(x+10)$.
从而知函数 $y=f(x)$ 的周期为 $T=10$，又 $f(1)=f(3)=0$，
所以 $f(11)=f(13)=f(-7)=f(-9)=0$.
故方程 $f(x)=0$ 在 $[0,10]$，$[-10,0]$ 上均有 2 个根，
从而知方程 $f(x)=0$ 在 $[0,2000]$ 上有 400 个根，在 $(2000,2005]$ 上有 2 个根，在 $[-2000,0)$ 上有 400 个根，在 $[-2005,-2000]$ 上没有根.
所以方程 $f(x)=0$ 在 $[-2005,2005]$ 上有 802 个根.

47.（1） 因为 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$，
所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

（2） $f(x)=-\frac{1}{2}$ 在 $[0,2016]$ 上共有 504 个解.

【解析】当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$，所以当 $-1\leq x\leq 0$ 时，$f(x)=-f(-x)=\frac{1}{2}x$，
所以 $f(x)=\frac{1}{2}x$，$-1\leq x\leq 1$.
当 $1<x<3$ 时，$-1<x-2<1$，所以 $f(x)=-f(x-2)=-\frac{1}{2}(x-2)$，

故 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & -1\leq x\leq 1,\\ -\frac{1}{2}(x-2), & 1<x<3.\end{cases}$

由 $f(x)=-\frac{1}{2}$，得 $x=-1$．故 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 的所有解是 $x=4n-1(n\in\mathbf{Z})$，
令 $0\leq 4n-1\leq 2016$，则 $\frac{1}{4}\leq n\leq\frac{2017}{4}$，而 $n\in\mathbf{Z}$，所以 $1\leq n\leq 504(n\in\mathbf{Z})$，
所以 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 在 $[0,2016]$ 上共有 504 个解.

（3） 若 $x\in[0,2]$，则 $x+2\in[2,4]$，
$f(x+2)=\frac{1}{k}f(x)=\frac{1}{k}x(x-2)=\frac{1}{k}[(x+2)-2][(x+2)-4]$，
所以当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=\frac{1}{k}(x-2)(x-4)$.
若 $x\in[-2,0)$，则 $x+2\in[0,2)$，所以 $f(x+2)=(x+2)[(x+2)-2]=x(x+2)$.
所以 $f(x)=kf(x+2)=kx(x+2)$.
若 $x\in[-4,-2)$，则 $x+2\in[-2,0)$，
所以 $f(x+2)=k(x+2)[(x+2)+2]=k(x+2)(x+4)$.
所以 $f(x)=kf(x+2)=k^2(x+2)(x+4)$，因为 $(2,3]\subset[2,4]$，$[-3,-2)\subset[-4,-2)$，

所以当 $x\in[-3,3]$ 时，$f(x)=\begin{cases}k^2(x+2)(x+4), & x\in[-3,-2),\\ kx(x+2), & x\in[-2,0),\\ x(x-2), & x\in[0,2],\\ \frac{1}{k}(x-2)(x-4), & x\in(2,3].\end{cases}$

可知，当 $x \in [-3,3]$ 时，最大值和最小值必在 $x=-3$ 或 $x=-1$ 或 $x=1$ 或 $x=3$ 处取得（可画图分析）.

因为 $f(-3)=-k^2$，$f(-1)=-k$，$f(1)=-1$，$f(3)=-\frac{1}{k}$，

所以当 $-1<k<0$ 时，$y_{\max}=f(3)=-\frac{1}{k}$，$y_{\min}=f(1)=-1$；

当 $k=-1$ 时，$y_{\max}=f(-1)=f(3)=1$，$y_{\min}=f(-3)=f(1)=-1$；

当 $k<-1$ 时，$y_{\max}=f(-1)=-k$，$y_{\min}=f(-3)=-k^2$.

48.（1） 因为 $f(x)=3x^{4-3n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增 所以 $n=1$，

所以 $f(x)=3x,x\in[0,1]$.

因为 $f(1)=3$ 且 $y=f(x)(-1\le x\le 1)$ 为奇函数，故 $f(-1)=-3$，又周期 $T=5$，故 $f(4)=-3$，

得 $\begin{cases}\log_a 1+b=3\\ \log_a 4+b=-3\end{cases}$，所以 $\begin{cases}b=3\\ a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}$ 所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}x+3=-3\log_2 x+3$，

所以 $f(x)=-3\log_2 x+3,x\in[1,4]$.

（2） 由 (1) 知 $f(x)=3x,x\in[0,1]$.

从而 $x\in[-1,0)$ 时，$-x\in(0,1]$，

所以 $f(x)=-f(-x)=-(-3x)=3x$.

故 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=3x$，

因为当 $x\in[5k-1,5k+1],k\in\mathbf{Z}$ 时，$x-5k\in[-1,1]$，

所以 $f(x)=f(x-5k)=3(x-5k)=3x-15k,k\in\mathbf{Z}$.

又当 $x\in(5k+1,5k+4],k\in\mathbf{Z}$ 时，$x-5k\in(1,4]$，

所以 $f(x)=f(x-5k)=-3\log_2(x-5k)+3$，

故 $f(x)=\begin{cases}3x-15k, & x\in[5k-1,5k+1]\\ -3\log_2(x-5k)+3, & x\in(5k+1,5k+4]\end{cases},k\in\mathbf{Z}$.

49.（1） 当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^2-8x+9$，由条件：当 $x<0$ 时，$f(x)=f(x+2)$，

当 $-6\le x<0$ 时，存在 $0\le t<2$ 使得 $f(x)=f(t)$.

从而只要求当 $0\le x\le 5$ 时，求 $|f(x)|$ 的最大值.

此时 $f(4)\le f(x)\le f(0)$，即 $-7\le f(x)\le 9$，

所以 $|f(x)|$ 的最大值为 9.

（2） $f(x)=x^2+ax+1-a=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-a-\frac{a^2}{4}$，其中 $0\le x\le t$.

①当 $0\le-\frac{a}{2}\le t$，$f_{\min}(x)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=1-a-\frac{a^2}{4}$，

$f_{\max}(x)=\max\{f(0),f(t)\}=\max\{1-a,t^2+at+1-a\}$.

$|f(x)|\le 3$ 恒成立转化为 $\begin{cases}1-a\le 3\\ t^2+at+1-a\le 3\\ 1-a-\frac{a^2}{4}\ge-3\end{cases}$，则 $M(a)=t_{\max}=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a+8}}{2}(-2\le a\le 0)$.

由 $\frac{-a+\sqrt{a^2+4a+8}}{2}=\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+4a+8}}{2}+1=\frac{2}{(a+2)+\sqrt{a^2+4a+8}}+1$.

显然在 $[-2,0]$ 上单调递减，故此时 $M_{\max}(a)=M(-2)=2$.

②当 $0<t<-\frac{a}{2}$ 时，$f_{\min}(x)=f(t)=t^2+at+1-a$，$f_{\max}(x)=f(0)=1-a$，

则有 $\begin{cases}1-a\le 3\\ t^2+at+1-a\ge -3\end{cases}$，有 $a\ge -2$，则 $0<t<-\frac{a}{2}\le 1$，不可能比①中的值大.

③当 $-\frac{a}{2}<0<t$ 时，$f_{\max}(x)=f(t)=t^2+at+1-a$，$f_{\min}(x)=f(0)=1-a$，

则有 $\begin{cases}1-a\ge -3\\ t^2+at+1-a\le 3\end{cases}$，则 $M(a)=t_{\max}=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a+8}}{2}(0<a\le 4)$.

与①同理，可得 $M_{\max}(a)<M(0)<M(-2)=2$.

综上可得：当 $a=-2$ 时，$M_{\max}(a)=2$.

50.（1） 由 $\sin(x+a)=\sin(-x)$ 得

$$\sin(x+a)=-\sin x,$$

根据诱导公式得

$$a=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

所以 $y=\sin x$ 具有" $P(a)$ 性质"，其中 $a=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$.

（2） $\because y=g(x)$ 具有" $P(\pm 1)$ 性质"，$\therefore$ $g(1+x)=g(-x)$，$g(-1+x)=g(-x)$.

$\therefore g(x+2)=g(1+1+x)=g(-1-x)=g(x)$，从而得到 $y=g(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

设 $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$，则 $-\frac{1}{2}\le 1-x\le\frac{1}{2}$，所以

$$g(x)=g(x-2)=g(-1+x-1)=g(-x+1)=|-x+1|=|x-1|=g(x-1).$$

再设 $n-\frac{1}{2}\le x\le n+\frac{1}{2}(n\in\mathbf{Z})$，

当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时，$2k-\frac{1}{2}\le x\le 2k+\frac{1}{2}$，则 $-\frac{1}{2}\le x-2k\le\frac{1}{2}$，所以

$$g(x)=g(x-2k)=|x-2k|=|x-n|;$$

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时，$2k+1-\frac{1}{2}\le x\le 2k+1+\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{2}\le x-2k\le\frac{3}{2}$，所以

$$g(x)=g(x-2k)=|x-2k-1|=|x-n|.$$

$\therefore$ 对于 $n-\frac{1}{2}\le x\le n+\frac{1}{2}(n\in\mathbf{Z})$，都有 $g(x)=|x-n|$.

而 $n+1-\frac{1}{2}\le x+1\le n+1+\frac{1}{2}$，所以

$$g(x+1)=|(x+1)-(n+1)|=|x-n|=g(x).$$

$\therefore y=g(x)$ 是周期为 1 的函数.

①当 $m>0$ 时，要使得 $y=mx$ 与 $y=g(x)$ 有 2013 个交点，只要 $y=mx$ 与 $y=g(x)$ 在 $[0,1006)$ 上有 2012 个交点，而在 $[1006,1007)$ 有一个交点即可.

$\therefore y=mx$ 过 $\left(\frac{2013}{2},\frac{1}{2}\right)$，从而得 $m=\frac{1}{2013}$;

②当 $m<0$ 时，同理可得 $m=-\frac{1}{2013}$;

③当 $m=0$ 时，不合题意.

综上所述，$m=\pm\frac{1}{2013}$.