椭圆动态参数问题通关30练

1. 已知 $m,n,s,t \in \mathbf{R}^*$，$m+n=3$，$\frac{m}{s}+\frac{n}{t}=1$，其中 m，n 是常数且 $m<n$，若 $s+t$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$，满足条件的点 (m,n) 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ 一弦的中点，则此弦所在的直线方程为 (　　)

A. $x-2y+3=0$　　　　B. $4x-2y-3=0$

C. $x+y-3=0$　　　　D. $2x+y-4=0$

2. AB 是圆 C:$x^2+(y-1)^2=1$ 的直径，P 是椭圆 E:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是________.

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)(c>0)$，A，C 是椭圆短轴的两端点，过点 $E(3c,0)$ 的直线 AE 与椭圆相交于另一点 B，且 $F_1A /\!/ F_2B$.

（1）求椭圆的离心率；

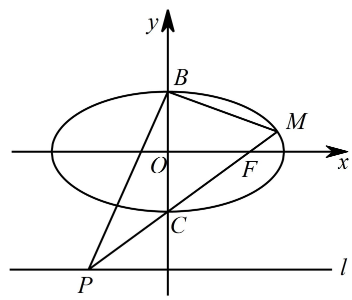
（2）设直线 F_2B 上有一点 $H(m,n)(m\neq 0)$ 在 $\triangle AF_1C$ 的外接圆上，求 $\frac{n}{m}$ 的值.

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 共焦点 F_2，抛物线上的点 M 到 y 轴的距离等于 $|MF_2|-1$，且椭圆与抛物线的交点 Q 满足 $|QF_2|=\frac{5}{2}$.

（1）求抛物线的方程和椭圆的方程；

（2）过抛物线上的点 P 作抛物线的切线 $y=kx+m$ 交椭圆于 A，B 两点，设线段 AB 的中点为 $C(x_0,y_0)$，求 x_0 的取值范围.

5. 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的长轴长是短轴长的 2 倍，右焦点为 F，点 B，C 分别是该椭圆的上、下顶点，点 P 是直线 $l:y=-2$ 上的一个动点（与 y 轴交点除外），直线 PC 交椭圆于另一点 M．记直线 BM，BP 的斜率分别为 k_1，k_2．



（1）当直线 PM 过点 F 时，求 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}$ 的值；

（2）求 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值．

6. 已知 P，Q 为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的两点，满足 $PF_2\perp QF_2$．其中 F_1，F_2 分别为左右焦点．

（1）求 $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 的最小值；

（2）若 $\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)\perp\left(\overrightarrow{QF_1}+\overrightarrow{QF_2}\right)$，设直线 PQ 的斜率为 k，求 k^2 的值．

7. 在直角坐标系中，椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，其中 F_2 也是抛物线 $C_2:y^2=4x$ 的焦点，点 P 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点，且 $|PF_2|=\frac{5}{3}$．

（1）求椭圆的方程；

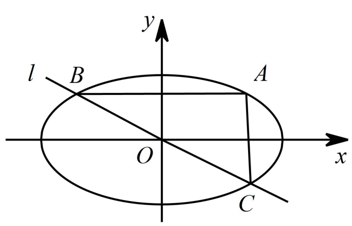
（2）过 F_2 且与坐标轴不垂直的直线交椭圆于 M，N 两点，若线段 OF_2 上存在定点 $T(t,0)$，使得以 TM，TN 为邻边的四边形是菱形，求 t 的取值范围．

8. 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 P，Q 是椭圆 C 上的两个动点，且使 $\angle PAQ$ 的角平分线总垂直于 x 轴，试判断直线 PQ 的斜率是否为定值?若是，求出该值；若不是，说明理由.

9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(2,1)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



（1）求椭圆的方程；

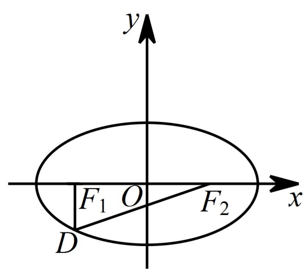
（2）若直线 l：$y=kx+m(k\neq 0)$ 与椭圆相交于 B，C 两点（异于点 A），线段 BC 被 y 轴平分，且 $AB\perp AC$，求直线 l 的方程.

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 共焦点 F_2，抛物线上的点 M 到 y 轴的距离等于 $|MF_2|-1$，且椭圆与抛物线的交点 Q 满足 $|QF_2|=\frac{5}{2}$.

（1）求抛物线的方程和椭圆的方程；

（2）过抛物线上的点 P 作抛物线的切线 $y=kx+m$ 交椭圆于 A 、 B 两点，求此切线在 x 轴上的截距的取值范围.

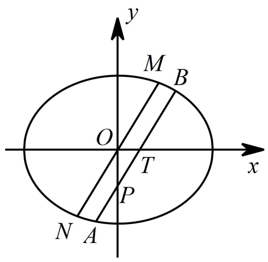
11. 如图，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 D 在椭圆上，$DF_1\perp F_1F_2$，$\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$，$\triangle DF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



（1）求该椭圆的标准方程；

（2）是否存在圆心在 y 轴上的圆，使圆在 x 轴的上方与椭圆有两个交点，且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点?若存在，求圆的方程，若不存在，请说明理由.

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，焦点在 x 轴上的椭圆 C:$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 经过点 $(b,2e)$，其中 e 为椭圆 C 的离心率．过点 $T(1,0)$ 作斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点（A 在 x 轴下方）．



（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过点 O 且平行于 l 的直线交椭圆 C 于点 M，N，求 $\frac{AT\cdot BT}{MN^2}$ 的值；

（3）记直线 l 与 y 轴的交点为 P．若 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{TB}$，求直线 l 的斜率 k．

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$ 过点 $\left(\sqrt{2},1\right)$，且与直线 $\sqrt{2}x+2y-4=0$ 相切．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若椭圆 E 与 x 轴交于 M，N 两点，椭圆 E 内部的动点 P 使 $|PM|$，$|PO|$，$|PN|$ 成等比数列，求 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围．

14. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$，$F_1$，$F_2$ 分别是其左、右焦点，以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 有且仅有两个交点.

（1）求椭圆 C 的方程；

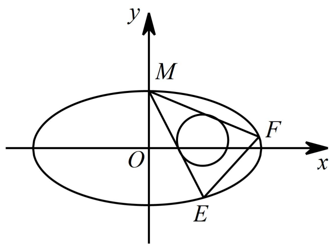
（2）设过点 F_1 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆于 A，B 两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 P，点 P 横坐标的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$，求线段 AB 长的取值范围.

15. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，左右焦点分别为 F_1，F_2，圆 $x^2+y^2=2$ 与直线 $x+y+b=0$ 相交所得弦长为 2.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设 Q 是椭圆 C 上不在 x 轴上的一个动点，O 为坐标原点，过点 F_2 作 OQ 的平行线交椭圆 C 于 M，N 两个不同的点，求 $\frac{|MN|}{|OQ|}$ 的取值范围.

16. 已知椭 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$，F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，P 是椭圆上任意一点，且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长是 $8+2\sqrt{15}$.



（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设圆 $T:(x-t)^2+y^2=\frac{4}{9}$，过椭圆的上顶点作圆 T 的两条切线交椭圆于 E，F 两点，当圆心在 x 轴上移动且 $t\in(1,3)$ 时，求 EF 的斜率的取值范围.

17. 已知椭圆 E：$mx^2+y^2=1(m>0)$.

（1）若椭圆 E 的右焦点坐标为 $\left(\sqrt{3},0\right)$，求 m 的值；

（2）由椭圆 E 上不同三点构成的三角形称为椭圆的内接三角形．若以 $B(0,1)$ 为直角顶点的椭圆 E 的内接等腰直角三角形恰有三个，求 m 的取值范围.

18. 已知椭圆 E 的右焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合，点 $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 E 上.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设 $P(-4,0)$，直线 $y=kx+1$ 与椭圆 E 交于 A，B 两点，若直线 PA，PB 均与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，求 k 的值.

19. 已知椭圆 $W:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一个焦点坐标为 $\left(\sqrt{3},0\right)$.

（1）求椭圆 W 的方程和离心率；

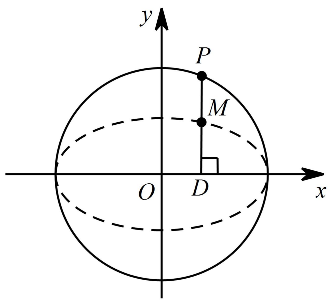
（2）若椭圆 W 与 y 轴交于 A，B 两点（A 点在 B 点的上方），M 是椭圆上异于 A，B 的任意一点，过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于 N，E 为线段 MN 的中点，直线 AE 与直线 $y=-1$ 交于点 C，G 为线段 BC 的中点，O 为坐标原点. 求 $\angle OEG$ 的大小.

20. 已知椭圆 E 的中心在原点，焦点 F_1，F_2 在 y 轴上，离心率等于 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，P 是椭圆 E 上的点，以线段 PF_1 为直径的圆经过 F_2，且 $9\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=1$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）做直线 l 与椭圆 E 交于两个不同的点 M，N，如果线段 MN 被直线 $2x+1=0$ 平分，求 l 的倾斜角的取值范围.

21. 在圆 $x^2+y^2=9$ 上任取一点 P，过点 P 作 x 轴的垂线段 PD，D 为垂足，点 M 在线段 DP 上，满足 $\frac{|DM|}{|DP|}=\frac{2}{3}$，当点 P 在圆上运动时，设点 M 的轨迹为曲线 C.



（1）求曲线 C 的方程；

（2）若直线 $y=m(x+5)$ 上存在点 Q，使过点 Q 作曲线 C 的两条切线互相垂直，求实数 m 的取值范围.

22. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，以上顶点和右焦点为直径端点的圆与直线 $x+y-2=0$ 相切.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）对于直线 $l{:}y=x+m$ 和点 $Q(0,3)$，椭圆 C 上是否存在不同的两点 A 与 B 关于直线 l 对称，且 $3\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=32$，若存在实数 m 的值，若不存在，说明理由.

23. 在直角坐标系中，椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，其中 F_2 也是抛物线 $C_2:y^2=4x$ 的焦点，点 P 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点，且 $|PF_2|=\frac{5}{3}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）过 F_2 且与坐标轴不垂直的直线交椭圆于 M，N 两点，若线段 OF_2 上存在定点 $T(t,0)$ 使得以 TM，TN 为邻边的四边形是菱形，求 t 的取值范围.

24. 经过原点的直线与椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A，B 两点，点 P 为椭圆上不同于 A，B 的一点，直线 PA，PB 的斜率均存在，且直线 PA，PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$.

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）设 F_1，F_2 分别为椭圆的左、右焦点，斜率为 k 的直线 l 经过椭圆的右焦点，且与椭圆交于 M，N 两点，若点 F_1 在以 $|MN|$ 为直径的圆内部，求 k 的取值范围.

25. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1\left(a>\sqrt{3}\right)$ 的右焦点为 F，右顶点为 A. 已知 $\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，其中 O 为原点，e 为椭圆的离心率.

（1）求椭圆的方程；

（2）设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B（B 不在 x 轴上），垂直于 l 的直线与 l 交于点 M，与 y 轴交于点 H. 若 $BF\perp HF$，且 $\angle MOA\leq\angle MAO$，求直线 l 的斜率的取值范围.

26. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，以原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切.

（1）求椭圆 C 的方程.

（2）若过点 $M(2,0)$ 的直线与椭圆 C 相交于 A，B 两点，设 P 为椭圆上一点，且满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=t\overrightarrow{OP}$（$O$ 为坐标原点），当 $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|<\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 时，求实数 t 的取值范围.

27. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A$ 为椭圆 E 的右顶点，B，C 为椭圆 E 的上、下顶点.

（1）若 N 为 AC 的中点，$\triangle BAN$ 的面积为 $\sqrt{2}$，椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，求椭圆 E 的方程；

（2）F 为椭圆 E 的右焦点，线段 CF 的延长线与线段 AB 交于点 M，与椭圆 E 交于点 P，求 $\frac{|CM|}{|CP|}$ 的最小值.

28. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,\sqrt{3})$，且离心率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若以 $k(k\neq 0)$ 为斜率的直线 l 与椭圆 E 相交于两个不同的点 A，B，且线段 AB 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形面积为 $\frac{1}{16}$，求 k 的取值范围.

29. 已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上下两个焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_1 与 y 轴垂直的直线交椭圆 C 于 M，N 两点，$\triangle MNF_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$，椭圆 C 的离心力为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）已知 O 为坐标原点，直线 $l:y=kx+m$ 与 y 轴交于点 P，与椭圆 C 交于 A，B 两个不同的点，若存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OP}$，求 m 的取值范围.

30. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1\left(a>\sqrt{2}\right)$ 的离心率 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 M，N 是椭圆 C 上的点，且直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设动点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$，是否存在常数 λ，使得 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=\lambda$ 上的点.

答案

第一部分

1. D　【解析】因为 m，n，s，t 为正数，$m+n=3$，$\frac{m}{s}+\frac{n}{t}=1$，$s+t$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$，

所以 $(s+t)\left(\frac{m}{s}+\frac{n}{t}\right)$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$，

所以 $(s+t)\left(\frac{m}{s}+\frac{n}{t}\right)=m+n+\frac{mt}{s}+\frac{ns}{t}\geq m+n+2\sqrt{mn}$，

满足 $\frac{mt}{s}=\frac{ns}{t}$ 时取最小值，此时最小值为 $m+n+2\sqrt{mn}=3+2\sqrt{2}$，

得：$mn=2$，又：$m+n=3$，所以，$m=1$，$n=2$.

设以 $(1,2)$ 为中点的弦交椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ 于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由中点坐标公式知 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=4$，

把 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 分别代入 $4x^2+y^2=16$，得 $\begin{cases}4x_1^2+y_1^2=16,\\4x_2^2+y_2^2=16,\end{cases}$

两式相减得 $2(x_1-x_2)+(y_1-y_2)=0$，所以 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_2}=-2$.

所以此弦所在的直线方程为 $y-2=-2(x-1)$，即 $2x+y-4=0$.

第二部分

2. $\left[-1,\frac{13}{3}\right]$

第三部分

3.（1） 因为 $|EF_2|=3c-c=2c=|F_1F_2|$，且 $F_1A\parallel F_2B$，

所以 B 是 A 和 E 的中点，

不妨设 $A(0,b)$，由 $E(3c,0)$，

所以 $B\left(\frac{3c}{2},\frac{b}{2}\right)$，

代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得：$\frac{\frac{9}{4}c^2}{a^2}+\frac{\frac{1}{4}b^2}{b^2}=1$，

所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

　（2） 由（Ⅰ）知，$e^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{1}{3}$，

得 $a^2=3c^2$，$b^2=a^2-c^2=2c^2$，

所以椭圆的方程可设为 $2x^2+3y^2=6c^2$，

若 $A\left(0,\sqrt{2}c\right)$，则 $C\left(0,-\sqrt{2}c\right)$，

线段 AF_1 的垂直平分线 l 的方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}c=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{c}{2}\right)$，

直线 l 与 x 轴的交点 $\left(\frac{c}{2},0\right)$ 是 $\triangle AF_1C$ 外接圆的圆心，

因此，外接圆的方程为 $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{c}{2}+c\right)^2$，

直线 F_2B 的方程为 $y=\sqrt{2}(x-c)$，

于是点 $H(m,n)$ 的坐标满足方程组：$\begin{cases} n=\sqrt{2}(m-c), \\ \left(m-\frac{c}{2}\right)^2+n^2=\frac{9c^2}{4}, \end{cases}$

由 $m\neq 0$，解得 $\begin{cases} n=\frac{2\sqrt{2}}{3}c, \\ m=\frac{5}{3}c, \end{cases}$

故 $\frac{n}{m}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$,

若 $A\left(0,-\sqrt{2}c\right)$，则 $C\left(0,\sqrt{2}c\right)$，

同理可得 $\frac{n}{m}=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$,

所以 $\frac{n}{m}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

4.（1） 因为抛物线上的点 M 到 y 轴的距离等于 $|MF_2|-1$，

所以点 M 到直线 $x=-1$ 的距离等于点 M 到焦点 F_2 的距离，

得 $x=-1$ 是抛物线 $y^2=2px$ 的准线，

即 $-\frac{p}{2}=-1$，

解得 $p=2$，

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$；

可知椭圆的右焦点 $F_2(1,0)$，左焦点 $F_1(-1,0)$，

由 $|QF_2|=\frac{5}{2}$，得 $x_Q+1=\frac{5}{2}$,

又 $y_Q^2=4x_Q$，

解得 $Q\left(\frac{3}{2},\pm\sqrt{6}\right)$，

由椭圆的定义得 $2a=|QF_1|+|QF_2|=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$，

所以 $a=3$，

又 $c=1$，得 $b^2=a^2-c^2=8$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

（2） 显然 $k\neq 0$，$m\neq 0$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 x，得 $ky^2-4y+4m=0$，

由题意知 $\Delta_1=16-16km=0$，得 $km=1$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1 \end{cases}$ 消去 y，得 $(9k^2+8)x^2+18kmx+9m^2-72=0$，

其中 $\Delta_2=(18km)^2-4(9k^2+8)(9m^2-72)>0$，

化简得 $9k^2-m^2+8>0$，

又 $k=\frac{1}{m}$，得 $m^4-8m^2-9<0$，

解得 $0<m^2<9$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{9}{9k^2+8}<0$，

由 $k^2=\frac{1}{m^2}>\frac{1}{9}$，得 $x_0>-1$，

所以 x_0 的取值范围是 $(-1,0)$.

5.（1） 由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的长轴长是短轴长的 2 倍，得 $a=2$，

由题意 $B(0,1)$，$C(0,-1)$，焦点 $F\left(\sqrt{3},0\right)$，

当直线 PM 过点 F 时，则直线 PM 的方程为 $\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{-1}=1$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$，

令 $y=-2$，得 $x=-\sqrt{3}$，则 $P\left(-\sqrt{3},-2\right)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{8\sqrt{3}}{7},\\ y=\frac{1}{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=-1\end{cases}$（舍），

即 $M\left(\frac{8\sqrt{3}}{7},\frac{1}{7}\right)$，

因为 $\overrightarrow{PB}=\left(\sqrt{3},3\right)$，$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{15\sqrt{3}}{7},\frac{15}{7}\right)$，

所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}=\frac{45}{7}+\frac{45}{7}=\frac{90}{7}$.

（2） 设 $P(m,-2)$，且 $m\neq 0$，则直线 PM 的斜率 $k=\frac{-1-(-2)}{0-m}=-\frac{1}{m}$，

则直线 PM 的方程为 $y=-\frac{1}{m}x-1$，

联立 $\begin{cases}y=-\frac{1}{m}x-1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 化简，得 $\left(1+\frac{4}{m^2}\right)x^2+\frac{8}{m}x=0$，

解得 $M\left(-\frac{8m}{m^2+4},\frac{4-m^2}{m^2+4}\right)$，

所以 $k_1=\frac{\frac{4-m^2}{m^2+4}-1}{-\frac{8m}{m^2+4}}=\frac{-2m^2}{-8m}=\frac{m}{4}$，$k_2=\frac{1-(-2)}{0-m}=-\frac{3}{m}$，

所以 $|k_1|+|k_2|=|-\frac{3}{m}|+|\frac{m}{4}|\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$，当且仅当 $m=\pm 2\sqrt{3}$ 时取等号.

所以 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

6.（1） 因为 $\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$（$O$ 为坐标原点），

显然 $|\overrightarrow{PO}|_{\min}=1$，

所以 $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 的最小值为 2.

（2） 由题意，可知 $OP\perp OQ$.

又 $F_2P\perp F_2Q$，

所以 PQ 是两个直角三角形 POQ 和 PF_2Q 的公共斜边，即得线段 PQ 的中点到 O，F_2 两点的距离相等，即线段 PQ 中点的横坐标为 $\frac{1}{2}$.

设直线 PQ 的方程为 $y=kx+b$，联立椭圆方程，得 $(1+2k^2)x^2+4kbx+2b^2-2=0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4kb}{1+2k^2}$.

又因为 $x_1+x_2=1$，

所以 $1+2k^2=-4kb$, ……①

另一方面，$x_1x_2=\frac{2b^2-2}{1+2k^2}$，$y_1y_2=\frac{2k^2b^2-2k^2}{1+2k^2}+kb+b^2$.

由 $x_1x_2+y_1y_2=0$，得 $\frac{2b^2-2}{1+2k^2}+\frac{2k^2b^2-2k^2}{1+2k^2}+kb+b^2=0$，

即 $4k^2b^2+2k^3b-2k^2+3b^2+kb-2=0$，……②

由①②，得 $-20k^4-20k^2+3=0$，解得 $k^2=\frac{-5+2\sqrt{10}}{10}$.

7.（1）抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$，$|PF_2|=x_P+1=\frac{5}{3}$，

所以 $x_P=\frac{2}{3}$，所以 $y_P=\frac{2}{3}\sqrt{6}$，所以 $P\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$，

又 $F_2(1,0)$，所以 $F_1(-1,0)$，

所以 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{7}{3}+\frac{5}{3}=4$，所以 $a=2$，

又因为 $c=1$，所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆方程是：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设 MN 中点为 $D(x_0,y_0)$，

因为以 TM，TN 为邻边的四边形是菱形，所以 $TD\perp MN$，

设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

因为 F_2 在椭圆内，所以 $\Delta>0$ 恒成立，所以 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，

所以 $y_0=\frac{-3m}{3m^2+4}$，所以 $x_0=my_0+1=\frac{4}{3m^2+4}$，

所以 $k_{TD}\cdot k_{MN}=-1$，即 $\frac{\frac{-3m}{3m^2+4}}{\frac{4}{3m^2+4}-t}=-m$，整理得 $t=\frac{1}{3m^2+4}$，

因为 $m^2>0$，所以 $3m^2+4\in(4,+\infty)$，所以 $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，

所以 t 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

8.（1）因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $A(2,1)$，

所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $a^2=b^2+c^2$，

解得 $a^2=8$，$b^2=2$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）法 1：因为 $\angle PAQ$ 的角平分线总垂直于 x 轴，所以 PA 与 AQ 所在直线关于直线 $x=2$ 对称．设直线 PA 的斜率为 k，则直线 AQ 的斜率为 $-k$.

所以直线 PA 的方程为 $y-1=k(x-2)$，直线 AQ 的方程为 $y-1=-k(x-2)$.

设点 $P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$，

由 $\begin{cases}y-1=k(x-2),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y，

得 $(1+4k^2)x^2-(16k^2-8k)x+16k^2-16k-4=0$．……①

因为点 $A(2,1)$ 在椭圆 C 上，所以 $x=2$ 是方程①的一个根，则 $2x_P=\frac{16k^2-16k-4}{1+4k^2}$.

所以 $x_P=\frac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}$.

同理 $x_Q=\frac{8k^2+8k-2}{1+4k^2}$.

所以 $x_P-x_Q=-\frac{16k}{1+4k^2}$.

又 $y_P-y_Q=k\left(x_P+x_Q-4\right)=-\frac{8k}{1+4k^2}$.

所以直线 PQ 的斜率为 $k_{PQ}=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{1}{2}$.

所以直线 PQ 的斜率为定值，该值为 $\frac{1}{2}$.

法 2：设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\frac{y_1-1}{x_1-2}$，直线 QA 的斜率 $k_{QA}=\frac{y_2-1}{x_2-2}$.

因为 $\angle PAQ$ 的角平分线总垂直于 x 轴，所以 PA 与 AQ 所在直线关于直线 $x=2$ 对称.

所以 $k_{PA}=-k_{QA}$，即 $\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=0$，……①

因为点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 在椭圆 C 上，

所以 $\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{2}=1$，……②

$\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}=1$．……③

由 ② 得 $\left(x_1^2-4\right)+4\left(y_1^2-1\right)=0$，得 $\frac{y_1-1}{x_1-2}=-\frac{x_1+2}{4(y_1+1)}$，……④

同理由 ③ 得 $\frac{y_2-1}{x_2-2}=-\frac{x_2+2}{4(y_2+1)}$，……⑤

由 ①④⑤ 得 $\frac{x_1+2}{4(y_1+1)}+\frac{x_2+2}{4(y_2+1)}=0$，

化简得 $x_1y_2+x_2y_1+(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+4=0$，……⑥

由 ① 得 $x_1y_2+x_2y_1-(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+4=0$，……⑦

⑥ − ⑦ 得 $x_1+x_2=-2(y_1+y_2)$.

② − ③ 得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{8}+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=0$，得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=\frac{1}{2}$.

所以直线 PQ 的斜率为 $k_{PQ}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$ 为定值.

法 3：设直线 PQ 的方程为 $y=kx+b$，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $y_1=kx_1+b$，$y_2=kx_2+b$，

直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\frac{y_1-1}{x_1-2}$，直线 QA 的斜率 $k_{QA}=\frac{y_2-1}{x_2-2}$.

因为 $\angle PAQ$ 的角平分线总垂直于 x 轴，所以 PA 与 AQ 所在直线关于直线 $x=2$ 对称.

所以 $k_{PA}=-k_{QA}$，即 $\frac{y_1-1}{x_1-2}=-\frac{y_2-1}{x_2-2}$，

化简得 $x_1y_2+x_2y_1-(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+4=0$.

把 $y_1=kx_1+b$，$y_2=kx_2+b$ 代入上式，并化简得

$2kx_1x_2+(b-1-2k)(x_1+x_2)-4b+4=0$．……(*)

由 $\begin{cases}y=kx+b,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+1)x^2+8kbx+4b^2-8=0$，……(**)

则 $x_1+x_2=-\frac{8kb}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4b^2-8}{4k^2+1}$，

代入 (*) 得 $\frac{2k(4b^2-8)}{4k^2+1}-\frac{8kb(b-1-2k)}{4k^2+1}-4b+4=0$，

整理得 $(2k-1)(b+2k-1)=0$，

所以 $k=\frac{1}{2}$ 或 $b=1-2k$.

若 $b=1-2k$，可得方程 (**) 的一个根为 2，不合题意.

若 $k=\frac{1}{2}$ 时，合题意.

所以直线 PQ 的斜率为定值，该值为 $\frac{1}{2}$.

9.（1） 由题意知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $b^2=a^2-c^2=\frac{1}{4}a^2$.

又点 $A(2,1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，

所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

解得 $\begin{cases}a^2=8,\\b^2=2,\end{cases}$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2） 将 $y=kx+m(k\neq 0)$ 代入椭圆的方程，得 $x^2+4(kx+m)^2-8=0$，

整理，得 $(1+4k^2)x^2+8mkx+4m^2-8=0$. ……①

由线段 BC 被 y 轴平分，得 $x_B+x_C=-\frac{8mk}{1+4k^2}=0$.

因为 $k\neq 0$，所以 $m=0$.

因为当 $m=0$ 时，点 B，C 关于原点对称，

所以设点 B 的坐标为 (x,kx)，

点 C 的坐标为 $(-x,-kx)$，

由方程 ①，得 $x^2=\frac{8}{1+4k^2}$.

又因为 $AB\perp AC$，点 A 的坐标为 $(2,1)$，

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(x-2)(-x-2)+(kx-1)(-kx-1)\\&=5-(1+k^2)x^2\\&=5-\frac{8(1+k^2)}{1+4k^2}=0,\end{aligned}$$

所以 $k=\pm\frac{1}{2}$.

因为当 $k=\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=\frac{1}{2}x$ 过点 $A(2,1)$，故 $k=\frac{1}{2}$ 不符合题意，舍去，

所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$.

10.（1） 因为抛物线上的点 M 到 y 轴的距离等于 $|MF_2|-1$，

所以点 M 到直线 $x=-1$ 的距离等于点 M 到焦点 F_2 的距离，

得 $x=-1$ 是抛物线 $y^2=2px$ 的准线，即 $-\frac{p}{2}=-1$，

解得：$p=2$，

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$；

可知椭圆的右焦点 $F_2(1,0)$，左焦点 $F_1(-1,0)$，

由抛物线的定义及 $|QF_2|=\frac{5}{2}$，得 $x_Q+1=\frac{5}{2}$，

又 $y_Q^2=4x_Q$，解得：$Q\left(\frac{3}{2},\pm\sqrt{6}\right)$，

由椭圆的定义得 $2a=|QF_1|+|QF_2|=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$，

所以 $a=3$，又 $c=1$，得 $b^2=a^2-c^2=8$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

（2）显然 $k\neq0$，$m\neq0$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\y^2=4x\end{cases}$ 消去 x，得 $ky^2-4y+4m=0$，

由题意知 $\Delta_1=16-16km=0$，得 $km=1$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\end{cases}$ 消去 y，得 $(9k^2+8)x^2+18kmx+9m^2-72=0$，

其中 $\Delta_2=(18km)^2-4(9k^2+8)(9m^2-72)>0$，

化简得 $9k^2-m^2+8>0$，

又 $k=\frac{1}{m}$，得 $m^4-8m^2-9<0$，解得 $0<m^2<9$，

切线在 x 轴上的截距为 $x=-\frac{m}{k}$，又 $-\frac{m}{k}=-m^2>-9$，

所以 $-9<-m^2<0$，

所以切线在 x 轴上的截距的取值范围是 $(-9,0)$.

11.（1）设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$，

由 $\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$ 得 $|DF_1|=\frac{|F_1F_2|}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$，

由 $DF_1\perp F_1F_2$ 得 $S_{\Delta DF_1F_2}=\frac{1}{2}|DF_1|\cdot|F_1F_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}c^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $c=1$.

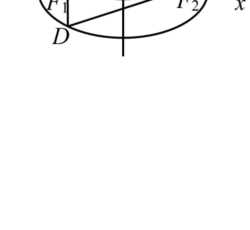
从而 $|DF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|DF_2|^2=|DF_1|^2+|F_1F_2|^2=\frac{9}{2}$，

因此 $|DF_2|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以 $2a=|DF_1|+|DF_2|=2\sqrt{2}$，故 $a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=1$.

因此，所求椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）如图，



设存在圆心在 y 轴上的圆 C 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交于 x 轴的上方，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是两个交点，$y_1>0$，$y_2>0$，F_1P_1，F_2P_2 是圆 C 的切线，且 $F_1P_1\perp F_2P_2$，
由圆和椭圆的对称性，易知 $x_2=-x_1$，$y_1=y_2$，$|P_1P_2|=2|x_1|$，
由（Ⅰ）知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，
所以 $\overrightarrow{F_1P_1}=(x_1+1,y_1)$，$\overrightarrow{F_2P_2}=(-x_1-1,y_1)$，再由 $F_1P_1\perp F_2P_2$ 得 $-(x_1+1)^2+y_1^2=0$，即 $y_1^2=(x_1+1)^2$，
由点 P_1 在椭圆上，代入椭圆方程得 $1-\frac{x_1^2}{2}=(x_1+1)^2$，即 $3x_1^2+4x_1=0$，解得 $x_1=-\frac{4}{3}$ 或 $x_1=0$.
当 $x_1=0$ 时，P_1，P_2 重合，此时与题设要求不符合.
当 $x_1=-\frac{4}{3}$ 时，过 P_1，P_2 分别与 F_1P_1，F_2P_2 垂直的直线的交点即为圆心 C，
设 $C(0,y_0)$，由 $CP_1\perp F_1P_1$，得 $\frac{y_1-y_0}{x_1}\cdot\frac{y_1}{x_1+1}=-1$，而 $y_1=|x_1+1|=\frac{1}{3}$，故 $y_0=\frac{5}{3}$，
圆 C 的半径 $|CP_1|=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，
综上，存在满足条件的圆，其方程为：$x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{32}{9}$.
12.（1） 因为椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 经过点 $(b,2e)$，
所以 $\frac{b^2}{8}+\frac{4e^2}{b^2}=1$.
因为 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{8}$，
所以 $\frac{b^2}{8}+\frac{c^2}{2b^2}=1$.
因为 $a^2=b^2+c^2$，
所以 $\frac{b^2}{8}+\frac{8-b^2}{2b^2}=1$.
整理得 $b^4-12b^2+32=0$，解得 $b^2=4$ 或 $b^2=8$（舍）.
所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.
（2） 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.
因为 $T(1,0)$，则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.
联立直线 l 与椭圆方程 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$
消去 y，得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-8=0$，
所以 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},\\ x_1x_2=\frac{2k^2-8}{2k^2+1}.\end{cases}$
因为 $MN\parallel l$，
所以直线 MN 方程为 $y=kx$，
联立直线 MN 与椭圆方程 $\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$
消去 y 得 $(2k^2+1)x^2=8$，解得 $x^2=\frac{8}{2k^2+1}$，

因为 $MN // l$，

所以 $\frac{AT\cdot BT}{MN^2}=\frac{(1-x_1)\cdot(x_2-1)}{(x_M-x_N)^2}$.

因为 $(1-x_1)\cdot(x_2-1)=-[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=\frac{7}{2k^2+1}$,

$(x_M-x_N)^2=4x^2=\frac{32}{2k^2+1}$,

所以

$$\begin{aligned}\frac{AT\cdot BT}{MN^2}&=\frac{(1-x_1)\cdot(x_2-1)}{(x_M-x_N)^2}\\&=\frac{7}{2k^2+1}\cdot\frac{2k^2+1}{32}\\&=\frac{7}{32}.\end{aligned}$$

（3） 在 $y=k(x-1)$ 中，令 $x=0$，则 $y=-k$，

所以 $P(0,-k)$，

从而 $\overrightarrow{AP}=(-x_1,-k-y_1)$，$\overrightarrow{TB}=(x_2-1,y_2)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{TB}$,

所以 $-x_1=\frac{2}{5}(x_2-1)$，即 $x_1+\frac{2}{5}x_2=\frac{2}{5}$.

由（2）知，$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},\\x_1x_2=\frac{2k^2-8}{2k^2+1}.\end{cases}$

由 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},\\x_1+\frac{2}{5}x_2=\frac{2}{5}\end{cases}$ 解得 $x_1=\frac{-4k^2+2}{3(2k^2+1)}$，$x_2=\frac{16k^2-2}{3(2k^2+1)}$.

因为 $x_1x_2=\frac{2k^2-8}{2k^2+1}$,

所以 $\frac{-4k^2+2}{3(2k^2+1)}\times\frac{16k^2-2}{3(2k^2+1)}=\frac{2k^2-8}{2k^2+1}$,

整理得 $50k^4-83k^2-34=0$，解得 $k^2=2$ 或 $k^2=-\frac{17}{50}$（舍）.

又因为 $k>0$，

所以 $k=\sqrt{2}$.

13.（1） 因为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 $\sqrt{2}x+2y-4=0$ 相切，

联立 $\begin{cases}\sqrt{2}x+2y-4=0,\\b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\end{cases}$

整理得 $\left(b^2+\frac{1}{2}a^2\right)x^2-2\sqrt{2}a^2x+4a^2-a^2b^2=0$，

由 $\Delta=0$，可得 $\frac{1}{2}a^2+b^2=4$，……①

因为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $\left(\sqrt{2},1\right)$，所以 $\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，……②

由 ①② 得 $a^2=4$，$b^2=2$，

所以椭圆 E 的方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2） 由（1）得 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，设 $P(m,n)$，

因为 $|PM|$，$|PO|$，$|PN|$ 成等比数列，

所以

$$|PO|^2=|PN|\cdot|PM| \Rightarrow \quad \left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2=\sqrt{(m-2)^2+n^2}\cdot\sqrt{(m+2)^2+n^2}$$
$$\Rightarrow \quad m^2=n^2+2,$$

因为 $\overrightarrow{PM}=(-2-m,-n)$，$\overrightarrow{PN}=(2-m,-n)$，

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=m^2+n^2-4=2n^2-n$.

因为 P 在椭圆 E 内部，所以 $0\le n^2<1$，

所以 $-2\le\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}<0$.

即 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围为 $[-2,0)$.

14.（1） 根据题意，因为以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 有且仅有两个交点，

所以 $b=c=1$，即 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}$，即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2） 根据题意，过点 F_1 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆于 A，B 两点，

即直线 AB 的斜率存在，

设直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)$，与 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 联立，

得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，$\Delta>0$，有 $k^2+1>0$，解之，得 $k\in\mathbf{R}$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，

$x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+1)+k(x_2+1)=\frac{2k}{1+2k^2}$，

即 $M\left(-\frac{2k^2}{1+2k^2},\frac{k}{1+2k^2}\right)$，

设直线 AB 的垂直平分线方程为 $y-\frac{k}{1+2k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{2k^2}{1+2k^2}\right)$，

令 $y=0$，得 $x_P=\frac{-k^2}{1+2k^2}$，

因为 $x_P\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$，所以 $0<k^2<\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned}|AB| &=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2]}\\ &=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(-\frac{4k^2}{1+2k^2}\right)^2-4\frac{2k^2-2}{1+2k^2}\right]}\\ &=\frac{2\sqrt{2}\cdot(1+k^2)}{1+2k^2}\\ &=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{1+2k^2}\right)\in\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2}\right),\end{aligned}$$

即线段 AB 长的范围是 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2}\right)$.

15.（1） 由已知可得：圆心到直线 $x+y+b=0$ 的距离为 1，

即 $\frac{b}{\sqrt{2}}=1$，

所以 $b=\sqrt{2}$，

又椭圆 C 经过点 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3b^2}=1$，得到 $a=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）设 $Q(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

OQ 的方程为 $x=my$，

则 MN 的方程为 $x=my+1$.

由 $\begin{cases}x=my,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x^2=\frac{6m^2}{2m^2+3},\\ y^2=\frac{6}{2m^2+3},\end{cases}$

即 $\begin{cases}x_0^2=\frac{6m^2}{2m^2+3},\\ y_0^2=\frac{6}{2m^2+3},\end{cases}$

所以 $|OQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_0|=\frac{\sqrt{6}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{2m^2+3}}$,

由 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(2m^2+3)y^2+4my-4=0$，

所以 $\Delta>0$，

解之得 m 为任意实数.

$y_1+y_2=\frac{4m}{2m^2+3}$，$y_1y_2=-\frac{4}{2m^2+3}$,

$$\begin{aligned}|MN|&=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|\\&=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\\&=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\frac{16m^2}{(2m^2+3)^2}+\frac{16}{2m^2+3}}\\&=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}}{2m^2+3}\\&=\frac{4\sqrt{3}(1+m^2)}{2m^2+3},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{|MN|}{|OQ|}&=\frac{\frac{4\sqrt{3}\left(1+m^2\right)}{2m^2+3}}{\sqrt{\frac{6(1+m^2)}{2m^2+3}}}\\&=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{2m^2+3}}\\&=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1+m^2}{2m^2+3}}\\&=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{1+m^2}}},\end{aligned}$$

因为 $1+m^2\geq 1$，

所以 $0<\frac{1}{1+m^2}\leq 1$，

即 $2<2+\frac{1}{1+m^2}\leq 3$，

即 $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{2+\frac{1}{1+m^2}}<\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\leq\frac{|MN|}{|OQ|}<2$，

即 $\frac{|MN|}{|OQ|}$ 的取值范围为 $\left[\frac{2\sqrt{6}}{3},2\right)$.

16.（1） 由 $e=\frac{\sqrt{15}}{4}$，即 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，可知 $a=4b$，$c=\sqrt{15}b$，

因为 $\triangle PF_1F_2$ 的周长是 $8+2\sqrt{15}$，

所以 $2a+2c=8+2\sqrt{15}$，

所以 $a=4$，$b=1$，

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+y^2=1$.

（2） 椭圆的上顶点为 $M(0,1)$，设过点 M 与圆 T 相切的直线方程为 $y=kx+1$，

由直线 $y=kx+1$ 与 T 相切可知 $\frac{|kt+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{3}$,

即 $(9t^2-4)k^2+18tk+5=0$，

所以 $k_1+k_2=-\frac{18t}{9t^2-4}$，$k_1k_2=\frac{5}{9t^2-4}$,

由 $\begin{cases}y=k_1x+1,\\ \frac{x^2}{16}+y^2=1\end{cases}$ 得 $\left(1+16k_1^2\right)x^2+32k_1x=0$，

所以 $x_E=-\frac{32k_1}{1+16k_1^2}$,

同理 $x_F=-\frac{32k_2}{1+16k_2^2}$,

则

$$\begin{aligned}k_{EF}&=\frac{y_E-y_F}{x_E-x_F}\\&=\frac{(k_1x_E+1)-(k_2x_F+1)}{x_E-x_F}\\&=\frac{k_1x_E-k_2x_F}{x_E-x_F}\\&=\frac{k_1+k_2}{1-16k_1k_2}\\&=\frac{6t}{28-3t^2}.\end{aligned}$$

当 $1<t<3$ 时，$f(t)=\frac{6t}{28-3t^2}$ 为增函数，

故 EF 的斜率的范围为 $\left(\frac{6}{25},18\right)$.

17.（1） 椭圆 E 的方程可以写成 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+y^2=1$，焦点 $\left(\sqrt{3},0\right)$ 在 x 轴上，

所以 $a^2=\frac{1}{m}$，$b^2=1$，$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{m}-1=\sqrt{3}^2=3$，求得 $m=\frac{1}{4}$.

（2） 设椭圆 E 内接等腰直角三角形的两直角边分别为 BA，BC，设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，显然 BA 与 BC 不与坐标轴平行，且 $k_{BA}\cdot k_{BC}=-1<0$.

所以可设直线 BA 的方程为 $y=kx+1(k>0)$，则直线 BC 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+1$，由 $\begin{cases}mx^2+y^2=1,\\y=kx+1\end{cases}$

消去 y 得到 $(m+k^2)x^2+2kx=0$，

所以 $x_1=\frac{-2k}{m+k^2}$，求得 $|BA|=\sqrt{k^2+1}|x_1-0|=\sqrt{k^2+1}\frac{|-2k|}{m+k^2}=\frac{2k}{m+k^2}\sqrt{k^2+1}$，同理可求

$$|BC| = \sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right)^2+1}\times|x_2-0|$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right)^2+1}\times\frac{\left|-2\left(-\frac{1}{k}\right)\right|}{m+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{mk^2+1}\sqrt{k^2+1}.$$

因为 ΔABC 为以 $B(0,1)$ 为直角顶点的等腰直角三角形，

所以 $|BA| = |BC|$，

所以 $\frac{2k}{m+k^2}\sqrt{k^2+1} = \frac{2}{mk^2+1}\sqrt{k^2+1}$，整理得

$$mk^3-k^2+k-m=0 \Rightarrow (mk^3-m)-(k^2-k)=0$$
$$\Rightarrow m(k^3-1)-(k^2-k)=0$$
$$\Rightarrow m(k-1)(k^2+k+1)-k(k-1)=0$$
$$\Rightarrow (k-1)[mk^2+(m-1)k+m]=0,$$

所以 $k=1$ 或 $mk^2+(m-1)k+m=0$，设 $f(k)=mk^2+(m-1)k+m$.

因为以 $B(0,1)$ 为直角顶点的椭圆内接等腰直角三角形恰有三个，

所以关于 k 的方程 $mk^2+(m-1)k+m=0$ 有两个不同的正实根 x_1，x_2，且不为 1，

所以 $\begin{cases} f(1)\neq 0 \Rightarrow m+(m-1)+m\neq 0\Rightarrow m\neq\frac{1}{3}, \\ x_1+x_2>0\Rightarrow -\frac{m-1}{m}>0\Rightarrow 0<m<1, \\ x_1\cdot x_2>0\Rightarrow 1>0,\text{恒成立}, \\ \Delta>0\Rightarrow\Delta=(m-1)^2-4m^2>0\Rightarrow -1<m<\frac{1}{3}, \end{cases}$

所以实数 m 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

18.（1） 因为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，

所以 $c=1$，

所以 $2a=\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=4$，

即 $a=2$.

因为 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2） 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为直线 PA，PB 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，

所以 $k_{AP}+k_{BP}=0$，

即 $\frac{y_1}{x_1+4}+\frac{y_2}{x_2+4}=0$，

通分得 $\frac{y_1(x_2+4)+y_2(x_1+4)}{(x_1+4)(x_2+4)}=0$，

所以 $(kx_1+1)(x_2+4)+(kx_2+1)(x_1+4)=0$，

整理，得 $2kx_1x_2+(4k+1)(x_1+x_2)+8=0$. ……①

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{8k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=-\frac{8}{3+4k^2}$，

代入①，得 $k=1$.

19.（1）依题意，$a=2$，$c=\sqrt{3}$，

所以 $b^2=a^2-c^2=1$.

则椭圆 W 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）设 $M(x_0,y_0)$，$x_0\neq 0$，则 $N(0,y_0)$，$E\left(\frac{x_0}{2},y_0\right)$.

又 $A(0,1)$，

所以直线 AE 的方程为 $y-1=\frac{2(y_0-1)}{x_0}x$.

令 $y=-1$，则 $C\left(\frac{x_0}{1-y_0},-1\right)$.

又 $B(0,-1)$，G 为线段 BC 的中点，

所以 $G\left(\frac{x_0}{2(1-y_0)},-1\right)$.

所以 $\overrightarrow{OE}=\left(\frac{x_0}{2},y_0\right)$，$\overrightarrow{GE}=\left(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)},y_0+1\right)$，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}&=\frac{x_0}{2}\left(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)}\right)+y_0(y_0+1)\\&=\frac{x_0^2}{4}-\frac{x_0^2}{4(1-y_0)}+y_0^2+y_0.\end{aligned}$$

因为点 M 在椭圆 W 上，则 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，

所以 $x_0^2=4-4y_0^2$.

则 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}=1-\frac{x_0^2}{4(1-y_0)}+y_0=1-y_0-1+y_0=0$.

因此 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{GE}$.

故 $\angle OEG=90^\circ$.

20.（1）由题意可知：设题意的方程：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $c=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$，

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m+n=2a$，

线段 PF_1 为直径的圆经过 F_2，则 $PF_2\perp F_1F_2$，则 $n^2+(2c)^2=m^2$，

由题意得 $9m\times n\times\cos\angle F_1PF_2=1$，所以 $9n^2=1$，$n=\frac{1}{3}$，解得：$a=3$，$c=2\sqrt{2}$，则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以椭圆标准方程：$x^2+\frac{y^2}{9}=1$.

（2）假设存在直线 l，依题意 l 交椭圆所得弦 MN 被 $x=-\frac{1}{2}$ 平分，所以直线 l 的斜率存在.

设直线 l:$y=kx+m$，则

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(k^2+9)x^2+2kmx+m^2-9=0$，

因为 l 与椭圆交于不同的两点 M，N，

所以 $\Delta=4k^2m^2-4(k^2+9)(m^2-9)>0$，即 $m^2-k^2-9<0$， ……①

设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2km}{k^2+9}$，

所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{km}{k^2+9}=-\frac{1}{2}$，所以 $m=\frac{k^2+9}{2k}$， ……②

把 ② 代入 ① 式中得 $\left(\frac{k^2+9}{2k}\right)^2-(k^2+9)<0$，

所以 $k>\sqrt{3}$ 或 $k<-\sqrt{3}$，

所以直线 l 倾斜角 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

21.（1） 设 $P(x_0,y_0)$，$M(x,y)$，$D(x_0,0)$，

因为点 M 在线段 PD 上，且满足 $\frac{|DM|}{|DP|}=\frac{2}{3}$,

所以 $x_0=x$，$y_0=\frac{3}{2}y$，

又 P 在圆 $x^2+y^2=9$ 上，

所以 $x_0^2+y_0^2=9$，

所以 $x^2+\frac{9}{4}y^2=9$，

曲线 C 的方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

（2） 假设在直线 $y=m(x+5)$ 上存在点 $Q(x_0,y_0)$，设过点 $Q(x_0,y_0)$ 的椭圆的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，

即 $y=kx-kx_0+y_0$.

由 $y=kx-kx_0+y_0$，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，整理得：$(4+9k^2)x^2+18k(-kx_0+y_0)x+9(-kx_0+y_0)^2-36=0$，

由 $\Delta=324k^2(-kx_0+y_0)^2-36(4+9k^2)[(-kx_0+y_0)^2-4]=0$，整理得：$\left(9-x_0^2\right)k^2+2kx_0y_0+4-y_0^2=0$.

故过点 $Q(x_0,y_0)$ 的椭圆的两条切线斜率 k_1，k_2 分别是：$\left(9-x_0^2\right)k^2+2kx_0y_0+4-y_0^2=0$ 的两解，

故 $k_1k_2=\frac{4-y_0^2}{9-x_0^2}=-1\Rightarrow x_0^2+y_0^2=13$，

因为点 Q 是圆 $x^2+y^2=13$ 与 $y=m(x+5)$ 的公共点，

所以 $O(0,0)$ 到直线 $y=m(x+5)$ 的距离 $d\le\sqrt{13}$ 即可.

$\left(\frac{5m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2\le 13$，

解得 $12m^2\le 13$，

即 $-\frac{\sqrt{39}}{6}\le m\le\frac{\sqrt{39}}{6}$,

实数 m 的取值范围：$\left[-\frac{\sqrt{39}}{6},\frac{\sqrt{39}}{6}\right]$.

22.（1） 由椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2+c^2}=\frac{1}{2}$，得 $b=c$.

上顶点为 $(0,b)$，右焦点为 $(b,0)$，

以上顶点和右焦点为直径端点的圆的方程为 $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{b^2}{2}$,

所以 $\frac{|b-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$，即 $|b-2|=b$，得 $b=c=1$，$a=\sqrt{2}$，

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2） 由题意设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB 方程为：$y=-x+n$.

联立 $\begin{cases}y=-x+n,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 消 y 整理可得：$3x^2-4nx+2n^2-2=0$，

由 $\Delta=(-4n)^2-12(2n^2-2)=24-8n^2>0$，解得 $-\sqrt{3}<n<\sqrt{3}$.

$x_1+x_2=\frac{4n}{3}$，$x_1x_2=\frac{2n^2-2}{3}$,

设直线 AB 中点为 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2n}{3}$,

由点 P 在直线 AB 上得：$y_0=-\frac{2n}{3}+n=\frac{n}{3}$,

又点 P 在直线 l 上，所以 $\frac{n}{3}=\frac{2n}{3}+m$,

则 $m=-\frac{n}{3}\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. ……①

又 $\overrightarrow{QA}=(x_1,y_1-3)$，$\overrightarrow{QB}=(x_2,y_2-3)$,

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}-\frac{32}{3}&=(x_1,y_1-3)\cdot(x_2,y_2-3)-\frac{32}{3}\\&=x_1x_2+(y_1-3)(y_2-3)-\frac{32}{3}\\&=n^2-2n-3\\&=9m^2+6m-3\\&=3(3m-1)(m+1)\\&=0,\end{aligned}$$

解得：$m=\frac{1}{3}$ 或 $m=-1$. ……②

综合 ①②，知 m 的值为 $\frac{1}{3}$.

23.（1） 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$，$|PF_2|=x_p+1=\frac{5}{3}$,

所以 $x_p=\frac{2}{3}$,

所以 $y_p=\frac{2}{3}\sqrt{6}$,

所以 $P\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$,

又 $F_2(1,0)$,

所以 $F_1(-1,0)$,

所以 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{7}{3}+\frac{5}{3}=4$，

所以 $a=2$，

又因为 $c=1$，

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆方程是：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2） 设 MN 中点为 $D(x_0,y_0)$,

因为以 TM，TN 为邻边的四边形是菱形，

所以 $TD\perp MN$,

设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.\end{cases}$

整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，
因为 F_2 在椭圆内，
所以 $\Delta>0$ 恒成立，
所以 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$,
所以 $y_0=\frac{-3m}{3m^2+4}$,
所以 $x_0=my_0+1=\frac{4}{3m^2+4}$,
所以 $k_{TD}\cdot k_{MN}=-1$，即 $\frac{\frac{-3m}{3m^2+4}}{\frac{4}{3m^2+4}-t}=-\pi$，
整理得 $t=\frac{1}{3m^2+4}$,
因为 $m^2>0$，
所以 $3m^2+4\in(4,+\infty)$，
所以 $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，
所以 t 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.
24.（1） 设 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(-x_1,-y_1)$，
则 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 所以 $\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{b^2}{a^2}$.
因为 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{1}{4}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,
所以椭圆 C 的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2） 因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,
所以 $\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$c=\sqrt{3}b$，焦点 $F_1\left(-\sqrt{3}b,0\right)$，
设 $MN:y=k\left(x-\sqrt{3}b\right)$，
联立 $\begin{cases}y=k\left(x-\sqrt{3}b\right),\\ x^2+4y^2=4b^2\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-8\sqrt{3}k^2bx+12k^2b^2-4b^2=0$，
设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2b}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{12k^2b^2-4b^2}{4k^2+1}$，$y_1y_2=k^2\left(x_1-\sqrt{3}b\right)\left(x_2-\sqrt{3}b\right)=k^2\left[x_1x_2-\sqrt{3}b(x_1+x_2)+3b^2\right]$，
所以 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}<0$，所以

$$\begin{aligned}\left(x_1+\sqrt{3}b,y_1\right)\cdot\left(x_2+\sqrt{3}b,y_2\right)&=\left(x_1+\sqrt{3}bx_1x_2+\sqrt{3}b\right)+y_1y_2\\&=x_1x_2+\sqrt{3}b(x_1+x_2)+3b^2+k^2\left[x_1x_2-\sqrt{3}b(x_1+x_2)+3b^2\right]\\&=(1+k^2)x_1x_2-\sqrt{3}b(x_1+x_2)(1-k^2)+3b^2(1+k^2)\\&=\frac{(1+k^2)(12k^2b^2-4b^2)}{4k^2+1}+\frac{24k^2b^2(1-k^2)}{4k^2+1}+\frac{-3b^2(1+k^2)(4k^2+1)}{4k^2+1}\\&<0,\end{aligned}$$

所以 $(1+k^2)(12k^2-4)+24k^2(1-k^2)+3(1+k^2)(4k^2+1)<0$，
整理，得 $k^2<\frac{1}{47}$，解得 k 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{47}}{47},\frac{\sqrt{47}}{47}\right)$.

25.（1） 设 $F(c,0)$，

由 $\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$,

即 $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{3c}{a(a-c)}$,

可得 $a^2-c^2=3c^2$，

又 $a^2-c^2=b^2=3$，

所以 $c^2=1$，

因此 $a^2=4$.

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2） 设直线 l 的斜率为 $k(k\neq 0)$，

则直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，

设 $B(x_B,y_B)$，

由方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-2)\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.

解得 $x=2$，或 $x=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$,

由题意得 $x_B=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$，从而 $y_B=\frac{-12k}{4k^2+3}$.

由（1）知，$F(1,0)$，

设 $H(0,y_H)$，有 $\overrightarrow{FH}=(-1,y_H)$，$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{9-4k^2}{4k^2+3},\frac{12k}{4k^2+3}\right)$.

由 $BF\perp HF$，得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FH}=0$，

所以 $\frac{4k^2-9}{4k^2+3}+\frac{12ky_H}{4k^2+3}=0$，

解得 $y_H=\frac{9-4k^2}{12k}$.

因此直线 MH 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k}$.

设 $M(x_M,y_M)$，

由方程组 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ y=-\frac{1}{k}x+\frac{9-4k^2}{12k}\end{cases}$ 消去 y，

解得 $x_M=\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}$.

在 $\triangle MAO$ 中，$\angle MOA\leq\angle MAO\Leftrightarrow|MA|\leq|MO|$，

即 $(x_M-2)^2+y_M^2\leq x_M^2+y_M^2$，

化简得 $x_M\geq 1$，即 $\frac{20k^2+9}{12(k^2+1)}\geq 1$，

解得 $k\leq-\frac{\sqrt{6}}{4}$，或 $k\geq\frac{\sqrt{6}}{4}$.

所以，直线 l 的斜率的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{4}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{6}}{4},+\infty\right)$.

26.（1） 由题意知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,

即 $a^2=2b^2$，

又因为 $b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}}=1$，

所以 $a^2=2$，$b^2=1$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2） 由题意知直线 AB 的斜率存在.

设 $AB:y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$p(x,y)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$，

$\Delta=64k^4-4(2k^2+1)(8k^2-2)>0$，$k^2<\frac{1}{2}$,

$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+2k^2}$, $x_1\cdot x_2=\frac{8k^2-2}{1+2k^2}$,

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=t\overrightarrow{OP}$,

所以 $(x_1+x_2,y_1+y_2)=t(x,y)$，

$x=\frac{x_1+x_2}{t}=\frac{8k^2}{t(1+2k^2)}$, $y=\frac{y_1+y_2}{t}=\frac{1}{t}[k(x_1+x_2)-4k]=\frac{-4k}{t(1+2k^2)}$,

因为点 P 在椭圆上，

所以 $\frac{(8k^2)^2}{t^2(1+2k^2)^2}+2\frac{(-4k)^2}{t^2(1+2k^2)^2}=2$，

所以 $16k^2=t^2(1+2k^2)$，

因为 $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|<\frac{2\sqrt{5}}{3}$,

所以 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|<\frac{2\sqrt{5}}{3}$,

所以 $(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2]<\frac{20}{9}$,

所以 $(1+k^2)\left[\frac{64k^4}{(1+2k^2)^2}-4\cdot\frac{8k^2-2}{1+2k^2}\right]<\frac{20}{9}$,

所以 $(4k^2-1)(14k^2+13)>0$，

所以 $k^2>\frac{1}{4}$,

所以 $\frac{1}{4}<k^2<\frac{1}{2}$,

因为 $16k^2=t^2(1+2k^2)$，

所以 $t^2=\frac{16k^2}{1+2k^2}=8-\frac{8}{1+2k^2}$,

所以 $-2<t<-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{6}}{3}<t<2$，

所以实数 t 的取值范围为 $\left(-2,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},2\right)$.

27.（1） 因为 $S_{\triangle BAN}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2b\times a=\sqrt{2}$,

所以 $ab=2\sqrt{2}$. ……①

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ……②

由 ①② 解得 $a=2$，$c=b=\sqrt{2}$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2） 直线 $AB:y=b-\frac{b}{a}x$，直线 $CF:y=-b+\frac{b}{c}x$，

联立方程解得 $M\left(\frac{2ac}{a+c},\frac{ab-bc}{a+c}\right)$.

设 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CP}(\lambda>0)$，$P(x,y)$，

则 $\left(\frac{2ac}{a+c},\frac{ab-bc}{a+c}+b\right)=\lambda(x,y+b)$，

所以 $x=\frac{2ac}{\lambda(a+c)}$，$y=\frac{2ab-\lambda b(a+c)}{\lambda(a+c)}$.

把上式代入椭圆方程得

$\frac{4c^2}{\lambda^2(a+c)^2}+\frac{[2a-\lambda(a+c)]^2}{\lambda^2(a+c)^2}=1$，

即 $4c^2+[2a-\lambda(a+c)]^2=\lambda^2(a+c)^2$.

所以 $\lambda=\frac{a^2+c^2}{a(a+c)}=\frac{1+e^2}{1+e}=(e+1)+\frac{2}{e+1}-2$.

因为 $0<e<1$，

所以 $1<e+1<2$，

所以 $\lambda\geq 2\sqrt{2}-2$，

当且仅当 $e+1=\sqrt{2}$，即 $e=\sqrt{2}-1$ 时，等号成立.

此时 λ 取到最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

即 $\frac{|CM|}{|CP|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

28.（1） 由已知得 $\begin{cases}b=\sqrt{3},\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2） 设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m.\end{cases}$

整理得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，此方程有两个不等实根，

所以 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)>0$，

整理得 $4k^2-m^2+3>0$. ……①

由根与系数的关系，可得线段 AB 的中点坐标 (x_0,y_0) 满足 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4km}{4k^2+3}$，$y_0=kx_0+m=\frac{3m}{4k^2+3}$，

所以 AB 的垂直平分线方程为 $y-\frac{3m}{4k^2+3}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{4km}{4k^2+3}\right)$.

此直线与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为 $\left(\frac{-km}{4k^2+3},0\right)$，$\left(0,\frac{-m}{4k^2+3}\right)$，

由已知得 $\frac{1}{2}\left|\frac{-km}{4k^2+3}\right|\cdot\left|\frac{-m}{4k^2+3}\right|=\frac{1}{16}$，

整理得 $m^2=\frac{(4k^2+3)^2}{8|k|}$，$k\neq 0$. ……②

将 ② 代入 ① 得 $4k^2-\frac{\left(4k^2+3\right)^2}{8|k|}+3>0$，

整理得 $(4k^2+3)(4k^2-8|k|+3)<0$，$k\neq 0$，解得 $\frac{1}{2}<|k|<\frac{3}{2}$，

所以 k 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

29.（1） 根据已知椭圆 C 的焦距为 $2c$，当 $y=c$ 时，$|MN|=|x_1-x_2|=\frac{2b^2}{a}$，

由题意 $\triangle MNF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|F_1F_2||MN|=c|MN|=\frac{2b^2c}{a}=\sqrt{3}$，

由已知得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $b^2=1$，

所以 $a^2=4$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

（2） 若 $m=0$，则 $P(0,0)$，

由椭圆的对称性得 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$，即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$，

所以 $m=0$ 能使 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OP}$ 成立.

若 $m\neq 0$，由 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OP}$，得 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{OB}$，

因为 A，B，P 共线，

所以 $1+\lambda=4$，解得 $\lambda=3$.

设 $A(x_1,kx_1+m)$，$B(x_2,kx_2+m)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\4x^2+y^2-4=0,\end{cases}$

得 $(k^2+4)x^2+2mkx+m^2-4=0$，

由已知得 $\Delta=4m^2k^2-4(k^2+4)(m^2-4)>0$，即 $k^2-m^2+4>0$，

且 $x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{m^2-4}{k^2+4}$，

由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，得 $-x_1=3x_2$，即 $x_1=-3x_2$，

所以 $3(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=0$，

所以 $\frac{12k^2m^2}{\left(k^2+4\right)^2}+\frac{4\left(m^2-4\right)}{k^2+4}=0$，即 $m^2k^2+m^2-k^2-4=0$.

当 $m^2=1$ 时，$m^2k^2+m^2-k^2-4=0$ 不成立，

所以 $k^2=\frac{4-m^2}{m^2-1}$，

因为 $k^2-m^2+4>0$，

所以 $\frac{4-m^2}{m^2-1}-m^2+4>0$，即 $\frac{(4-m^2)m^2}{m^2-1}>0$，

所以 $1<m^2<4$，解得 $-2<m<-1$ 或 $1<m<2$.

综上所述，m 的取值范围为 $\{m|\quad -2<m<-1$ 或 $m=0$ 或 $1<m<2\}$.

30.（1） 由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $b^2=a^2-c^2=\frac{a^2}{2}$，

又 $b^2=2$，解得 $a=2$，

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2） 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$，

得 $x_0=x_1+2x_2$，$y_0=y_1+2y_2$，

又点 M，N 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 上，

所以 $x_1^2+2y_1^2=4$，$x_2^2+2y_2^2=4$，

设 k_{OM}，k_{ON} 分别为直线 OM，ON 的斜率，由题意知，

$k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$,

所以 $x_1x_2+2y_1y_2=0$，

所以

$$\begin{aligned}\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}&=\frac{x_0^2+2y_0^2}{4}\\&=\frac{(x_1+2x_2)^2+2(y_1+2y_2)^2}{4}\\&=\frac{(x_1^2+2y_1^2)+4(x_2^2+2y_2^2)+4(x_1\cdot x_2+2y_1\cdot y_2)}{4}\\&=\frac{20}{4}\\&=5.\end{aligned}$$

因此，存在常数 $\lambda=5$，使得 P 点在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=5$ 上.