不等式小专题

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

例 1. 已知正数 x，y 满足 $x+2y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值是________.

变 1：已知正数 x，y 满足 $x+2y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{x}{y}$ 的最小值是________.

变 2：已知正数 x，y 满足 $x+y=1$，则 $\frac{4}{x+1}+\frac{9}{y+2}$ 的最小值是________.

变 3：已知正数 x，y 满足 $x>y>0$，且 $x+y=2$ 则 $\frac{2}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$ 的最小值是______.

变 4：已知正数 x，y，则 $\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}$ 的最大值是______；$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{2x+y}$ 的最小值是______.

例 2. 已知正数 x，y 满足 $xy+2x+y=4$，则 $x+y$ 的最小值是________.

变 1：已知正数 x，y 满足 $2x+y+6=xy$，则 xy 的最小值是________.

变 2：已知正数 x，y 满足 $x+2x+2xy=8$，则 $x+2y$ 的最小值是________.

变 3：已知正数 x，y 满足 $4x^2+y^2+xy=1$，则 $2x+y$ 的最小值是________.

变 4：已知正数 x，y 满足 $x^2+y^2+xy=1$，则 $x+y$ 的最小值是________.

例 3. 若 a，b，$c>0$，且 $a(a+b+c)+bc=4$，则 $2a+b+c$ 的最小值是______.

变：若 a，b，$c>0$，且 $a^2+2ab+2ac+4bc=12$，则 $a+b+c$ 的最小值是______.

例 4. 设 x，y，$z>0$，且满足 $x-2y+3z=0$，则 $\dfrac{y^2}{xz}$ 的最小值是________.

变 1：设 x，y，$z>0$，且满足 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $S=\dfrac{1+z}{2xyz}$ 的最小值是________.

变 2：设 x，y，$z>0$，且满足 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $S=\dfrac{1}{2xyz^2}$ 的最小值是________.

例 5. 设 x，y，$z>0$，则 $\dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值是________.

变：若 a，b，$c>0$，则 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}$ 的最小值是_____.

参考答案：

例 1. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})(x+2y)\geq 3+2\sqrt{2}$.

变 1： $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x+2y}{x}+\dfrac{x}{y}\geq 1+2\sqrt{2}$.

变 2： $\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{9}{y+2}=(\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{9}{y+2})\dfrac{[(x+1)+(y+2)]}{4}\geq\dfrac{25}{4}$.

变 3： $\dfrac{2}{x+3y}+\dfrac{1}{x-y}=(\dfrac{2}{x+3y}+\dfrac{1}{x-y})\cdot\dfrac{[(x+3y)+(x-y)]}{4}\geq\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

变 4： $\dfrac{x}{2x+y}+\dfrac{y}{x+2y}\triangleq\dfrac{2m-n}{3m}+\dfrac{2n-m}{3n}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}(\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n})\leq\dfrac{2}{3}$；

$$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{2x+y}\triangleq\frac{2n-m}{3m}+\frac{2m-n}{3n}=\frac{2}{3}(\frac{n}{m}+\frac{m}{n})-\frac{2}{3}\geq\frac{2}{3}.$$

例 2. $xy+2x+y=4\Rightarrow 6=(x+1)(y+2)\leq(\dfrac{x+y+3}{2})^2\Rightarrow x+y\geq 2\sqrt{6}-3$.

变 1： $2x+y+6=xy\ge 2\sqrt{2xy}+6\Rightarrow xy\ge 18$．

变 2： $x+2y+2xy=8\Rightarrow 8=x+2y+x\cdot 2y\le x+2y+(\frac{x+2y}{2})^2\Rightarrow x+2y\ge 4$．

变 3： $4x^2+y^2+xy=1\Rightarrow 1=(2x+y)^2-3xy\ge(2x+y)^2-\frac{3}{2}(\frac{2x+y}{2})^2=\frac{5}{8}(2x+y)^2$．

$\Rightarrow 2x+y\le\frac{2\sqrt{10}}{5}$．

变 4： $x^2+y^2+xy=1\Rightarrow 1=(x+y)^2-xy\ge(x+y)^2-(\frac{x+y}{2})^2=\frac{3}{4}(x+y)^2$

$\Rightarrow x+y\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

例 3. $a(a+b+c)+bc=4\Rightarrow(a+b)(a+c)=4\le(\frac{2a+b+c}{2})^2\Rightarrow 2a+b+c\ge 4$．

变： $a^2+2ab+2ac+4bc=12\Rightarrow 12=a^2+2ab+2ac+2bc+2bc\le(a+b+c)^2$．

$\Rightarrow a+b+c\ge 2\sqrt{3}$．

例 4. $x-2y+3z=0\Rightarrow(2y)^2=(x+3z)^2\ge 12xz\Rightarrow\frac{y^2}{xz}\ge 3$．

变 1： $S=\frac{1+z}{2xyz}\ge\frac{1+z}{(x^2+y^2)z}=\frac{1+z}{(1-z^2)z}=\frac{1}{(1-z)z}\ge 4$．

变 2： $S=\frac{1}{2xyz^2}\ge\frac{1}{(x^2+y^2)z^2}=\frac{1}{(1-z^2)z^2}\ge 4$．

例 5. $\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{xy+yz}{x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2}\le\frac{xy+yz}{\sqrt{2}xy+\sqrt{2}yz}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

变： $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}=\frac{a^2+\frac{b^2}{5}+\frac{4b^2}{5}+c^2}{ab+2bc}\ge\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}ab+\frac{4\sqrt{5}}{5}bc}{ab+2bc}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.