2018年全国初中数学联赛福建省赛区初赛

试题解答及评分标准

（预赛时间：2018.02.25周日）

一、选择题（本题满分42分，每小题7分）

1. 已知$3a-5b-14c=0, a-3b-3c=0$，则$\dfrac{3a+2b}{a+3c}=$（　　）.

（A）$\dfrac{7}{3}$　　（B）$-\dfrac{7}{3}$　　（C）$\dfrac{5}{3}$　　（D）$-\dfrac{5}{3}$

解析 由已知条件得到

$$\begin{cases}3a-5b=14c,\\ a-3b=3c,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=\dfrac{27}{4}c,\\ b=\dfrac{5}{4}c,\end{cases}$因此，得到$\dfrac{3a+2b}{a+3c}=\dfrac{\frac{81}{4}c+\frac{5}{2}c}{\frac{27}{4}c+3c}=\dfrac{\frac{91}{4}c}{\frac{39}{4}c}=\dfrac{7}{3}$.

故应选（A）.

2. 不等式$\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}<x<\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$的所有整数解的和为（　　）.

（A）35　　（B）36　　（C）44　　（D）55

解析 先分母有理化再估算，得到$1<x<10$，而$2+3+\cdots+8+9=44$.

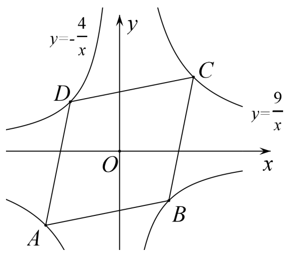
故应选C.

3. 方程$2016x^2-2017|x|-2018=0$的所有实数解的和为（　　）.

（A）$\dfrac{2017}{2016}$　　（B）$\dfrac{2018}{1008}$　　（C）$-\dfrac{2018}{2016}$　　（D）0

解析 若x_1是方程$2016x^2-2017|x|-2018=0$的根，则$-x_1$也是方程$2016x^2-2017|x|-2018=0$的根，因此，方程$2016x^2-2017|x|-2018=0$的所有实数解的和为0.

故应选（D）.



4. 如图，菱形四边形$ABCD$的四个顶点分别在反比例函数$y=\dfrac{9}{x}$、$y=-\dfrac{4}{x}$的图象上，若该菱形的面积为78，则这个菱形的边长为(　　).

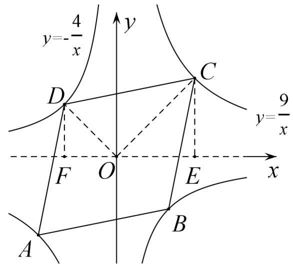
（A）$\dfrac{13\sqrt{2}}{4}$　　（B）$\dfrac{13\sqrt{2}}{2}$

（C）13　　　　　　　　　　　　　　　（D）$13\sqrt{2}$

解析　连接 OC 、 OD，过 C 、 D 引 x 轴的垂线，垂足分别为 E 、 F .

由四边形 $ABCD$ 是菱形，得 $OC \perp OD$ ，即 $\angle COD = 90°$.

故知△ COE ∽△ ODF .所以 $\dfrac{OD}{OC} = \sqrt{\dfrac{S_{\Delta ODF}}{S_{\Delta COE}}} = \sqrt{\dfrac{2S_{\Delta ODF}}{2S_{\Delta COE}}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$.



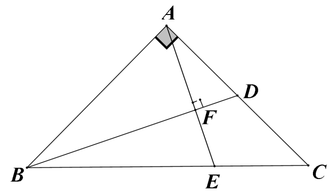
设 $OD = 2k$ 、 $OC = 3k$ ，

由 $4 \times \dfrac{1}{2} \cdot OC \cdot OD = 78$ ，得 $2 \cdot 3k \cdot 2k = 78$ ，解得 $k = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

所以 $CD = \sqrt{(3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{13}k = \dfrac{13\sqrt{2}}{2}$.

故应选 B.

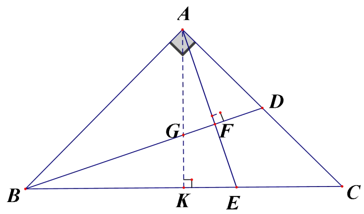
5. 如图，已知△ ABC 中， $AB = AC = 6$ ， $\angle BAC = 90°$, BD 是 AC 边上的中线，点 E 在 AC 上，且 $AE \perp BD$ ，垂足为 F . 则 AE =(　　).



（A）$\sqrt{5}$　　（B）$\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$　　（C）$2\sqrt{5}$　　（D）$\dfrac{12}{5}\sqrt{5}$

解析　过 A 作 $AK \perp BC$,垂足为 F， AK 交 BD 于 G.

因为△ ABC 为等腰三角形，所以 K 为 BC 的中点,且 $AK = 3\sqrt{2}$. 又 BD 是 AC 边上的中线，所以 G 为△ ABC 的重心，



所以 $AG = \dfrac{2}{3} \times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

在 Rt△ ABD 中， $AB = 6$ ， $AD = 3$ ，得

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3\sqrt{5}$.

由 $AF \perp BD$ 面积等式， $\dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \dfrac{1}{2} \cdot AF \cdot BD$, 得

$AF = \dfrac{6}{5}\sqrt{5}$.

又由 Rt△ AGF ∽ Rt△ AEK ，得 $AF \cdot AE = AG \cdot AK$, 得

$AE = 2\sqrt{5}$.

故应选 C.

6.. 2018 年全国初中数学联赛决赛时间临近，参赛选手小林用了三天时间做完了教练布置的 10 道赛前训练题. 假设每道训练题小林只能在一天内做完，并且第一天至少完成 2 道，最后一天至少完成 3 道. 试问：这三天，小林完成所有赛前训练题的不同情况有（　　）.

（A）15 种　　（B）18 种　　（C）21 种　　（D）28 种

解析：法一：本问题化归为小林三天内完成 5 道赛前训练题，每天完成数量没有要求.

对第一天进行分 6 大类枚举计数，分别为 6，5，4，3，2，1 共 21 种，故选 C.

法二：也可化归为求方程 $x+y+z=8$ 正整数解的个数转为组合模型 $\mathrm{C}_7^2=21$

故应选 C.

二、填空题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之比为 $-3:2$，那么 $\dfrac{ac}{b^2}$ 的值为__________.

解析 法一：设 $ax^2+bx+c=0$ 两根分别为 $-3k,2k$，由韦达定理可得，

$$\frac{b}{a}=k，\ \frac{c}{a}=-6k^2，\ \frac{ac}{b^2}=\frac{\frac{c}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}=-6，所以答案为-6.$$

法二：设 $ax^2+bx+c=0$ 两根分别为 $-3k,2k$，由韦达定理可得，$\dfrac{b}{a}=k$.

而 $a+bx+cx^2=0$ 两根分别为 $-\dfrac{1}{3k},\dfrac{1}{2k}$，由韦达定理可得 $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{1}{6k}$，所以答案为 -6.

8. 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个交点，将该抛物线向下移动 2 个单位得到新的抛物线 Γ，则抛物线 Γ 与 x 轴的两个交点间的距离为__________.

解析 因为平移不改变抛物线的形状和大小，所以问题等价于求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2$ 的两个交点间的距离.

由 $x^2=2$，得 $x=\pm\sqrt{2}$，即两个交点间的距离的距离为 $2\sqrt{2}$. 填 $2\sqrt{2}$.

9. 按某种顺序排成的一列数：1，2，3，5，8，13，21，34，,⋯，共有 2018 个数，并且从第 3 个数开始，每一个数都等于前两个数之和，则这列数中被 3 除余 2 的数有_____个.

解析 余数分别为 1，2，0，2，2，1，0，1，1，2，0，2，⋯，可以发现周期为 8，每个周期内有 3 个 2，$2018\div 8=252\cdots 2$，可得 $252\times 3+1=757$，所以答案为 757 个.

10. 已知有正整数 k，使得 $\dfrac{3}{21}<\dfrac{n}{2n+3k}<\dfrac{2}{13}$ 成立的正整数 n 的最小值为__________.

解析 为简便，将原不等式变形为

$$\frac{13}{2}<\frac{2n+3k}{n}<\frac{21}{3},$$

即

$$2+\frac{9}{2}<2+\frac{3k}{n}<2+\frac{15}{3},$$

$$\frac{3}{2}<\frac{k}{n}<\frac{5}{3},$$

由此得到

$$\begin{cases} 3n < 2k, & ① \\ 5n > 3k, & ② \end{cases}$$

设 r, s 为正整数，则式①、②可分别写成等式形式

$$\begin{cases} 3n = 2k - r, & ③ \\ 5n = 3k + s, & ④ \end{cases}$$

由式③、④消去 k，并经化简，得到

$$n = 3r + 2s,$$

由于 r, s 为正整数，其最小值都是 1，因此，有

$$n \geq 3\times1 + 2\times1 = 5.$$

在 $r = s = 1, n = 5$ 时，

$$k = \frac{3n + r}{2} = \frac{3\times5+1}{2} = 8.$$

故 n 的最小值为 5.

注：当得到 $\frac{3}{2} < \frac{k}{n} < \frac{5}{3}$ 时，也可以用 $n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 分别代入进行运算，也可以得到 n 的最小值为 5.

三、解答题：共 3 小题，第 11 题 20 分，第 12、13 题各 25 分，满分 70 分.

11.（本题满分 20 分）

实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 + ab + a + b = 1$，求 $a + b - 2ab$ 的最大值.

解法一 设参数 λ，则

$$\lambda(a^2 + b^2 + ab + a + b) - (a + b - 2ab)$$

$$= \lambda(a^2 + b^2) + (\lambda + 2)ab + (\lambda - 1)(a + b) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（5 分）$$

令 $\lambda + 2 = 2\lambda$，即 $\lambda = 2$，于是，有

$$2(a^2 + b^2 + ab + a + b) - (a + b - 2ab) = 2(a^2 + b^2) + 4ab + (a + b)$$

$$= 2(a + b)^2 + (a + b) = 2(a + b + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} \geq -\frac{1}{8},$$

因此得到

$$a + b - 2ab \leq 2(a^2 + b^2 + ab + a + b) + \frac{1}{8} = \frac{17}{8}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（10 分）$$

当且仅当 $\begin{cases} a + b + \frac{1}{4} = 0, \\ a + b - 2ab = \frac{17}{8}, \end{cases}$ 时，以上不等式取等号，解方程组得到 $\begin{cases} a = \frac{-1 - \sqrt{77}}{8}, \\ b = \frac{-1 + \sqrt{77}}{8}, \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} a=\dfrac{-1+\sqrt{77}}{8}, \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{77}}{8}. \end{cases}$$ ……………………………………………………………………………（15 分）

由此可知，$a+b-2ab$ 的最大值是 $\dfrac{17}{8}$，当且仅当

$$\begin{cases} a=\dfrac{-1-\sqrt{77}}{8}, \\ b=\dfrac{-1+\sqrt{77}}{8}, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a=\dfrac{-1+\sqrt{77}}{8}, \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{77}}{8}. \end{cases}$$

取到最大值. ……………………………………………………………………………………（20 分）

解法二 设 $a+b=u, ab=v$， $a+b-2ab=s$，则由已知条件 $a^2+b^2+ab+a+b=1$，得到

$$\begin{cases} u^2+u-v=1, \\ u-2v=s, \end{cases}$$ ……………………………………………………………………………（5 分）

消去 v 得到 $2u^2+u+(s-2)=0$，由于 a,b 为实数，$a+b-2ab=s$ 有最大值时，这时必须有

$$\Delta=1-8(s-2)=-8s+17\ge 0,$$

由此得到 $s\le\dfrac{17}{8}$，即 $a+b-2ab$ 得最大值为 $\dfrac{17}{8}$.……………………………………（10 分）

这时，有 $\begin{cases} u=-\dfrac{1}{4}, \\ u-2v=\dfrac{17}{8}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} u=-\dfrac{1}{4}, \\ v=-\dfrac{15}{16}, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a+b=-\dfrac{1}{4}, \\ ab=-\dfrac{15}{16}, \end{cases}$，解方程组得到 $\begin{cases} a=\dfrac{-1-\sqrt{77}}{8}, \\ b=\dfrac{-1+\sqrt{77}}{8}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=\dfrac{-1+\sqrt{77}}{8}, \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{77}}{8}. \end{cases}$ ………………（15 分）

由此可知，$a+b-2ab$ 的最大值是 $\dfrac{17}{8}$，当且仅当

$$\begin{cases} a=\dfrac{-1-\sqrt{77}}{8}, \\ b=\dfrac{-1+\sqrt{77}}{8}, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a=\dfrac{-1+\sqrt{77}}{8}, \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{77}}{8}. \end{cases}$$

取到最大值. ……………………………………………………………………………………（20 分）

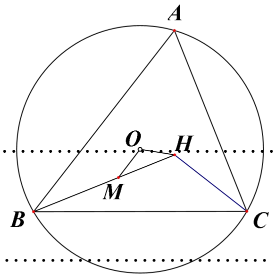
12. （本题满分 25 分）

如图，⊙O 为△ABC 的外接圆，∠BAC=60°，H 为△ABC 的垂心，在射线 BH 上取点 M，使 BM=CH，连接 OM、OH.

求证：OM=OH.

证明：连接 OB、OC.

因为 O 是$\triangle ABC$ 的外心，



所以 $OB=OC$，且$\angle OBC=2\angle BAC=2\times 60°=120°$. ……………………（5 分）

因为 H 是$\triangle ABC$ 的垂心，

所以$\angle BHC=180°-\angle BAC=180°-60°=120°$. ……………………………………（10 分）

故$\angle BOC=\angle BHC$，

所以 O、B、C、H 四点共圆. ……………………………………………………（15 分）

所以$\angle OBH=\angle OCH$，

即$\angle OBM=\angle OCH$. ………………………………………………………………（20 分）

又 $BM=CH$，

所以$\triangle OBM \cong \triangle OCH$，

所以 $OM=OH$. ……………………………………………………………………………（25 分）

13. （本题满分 25 分）

试证：每个大于 9 且被 3 整除的自然数 n，都可以表示为三个大于 1 且两两互质的自然数之和.（如：12=3+4+5，而自然数 3、4、5 都大于 1，且两两互质）

证明：因为$3|n$，$n>9$，

所以 n 只能表示为 $6k(k>1)$ 和 $6k+3(k>1)$ 这两种形式.

当 $n=6k(k>1)$ 时，取 $n=(2k-1)+2k+(2k+1)$ ……………………………………（5 分）

因为 $k>1$，

所以 $2k+1>2k>2k-1>1$.

又因为相邻的自然数互质，相邻的奇数也互质，

所以 $2k-1$ 与 $2k$ 互质，$2k$ 与 $2k+1$ 互质，$2k-1$ 与 $2k+1$ 也互质，

所以当 $n=6k(k>1)$ 时，命题成立 ……………………………………………………（10 分）

当 $n=6k+3(k>1)$，取 $n=(2k-1)+(2k+1)+(2k+3)$ …………………………（15 分）

因为 $k>1$，

所以 $2k+3>2k+1>2k-1>1$.

又因为相邻的奇数互质，

所以 $2k-1$ 与 $2k+1$ 互质，$2k+1$ 与 $2k+3$ 互质. ……………………………（20 分）

用 (a,b) 表示 a,b 两数的最大公约数，由辗转相除定理可得

$(2k-1,2k+3)=(4,2k+3)=1$.

所以 $2k-1$ 与 $2k+3$ 互质，

所以当 $n=6k+3(k>1)$ 时，命题成立 ………………………………………………（25 分）

综上可知，命题成立.