导数综合讲义

导数

【高考命题规律】

2014 年理科高考考查了导数的几何意义，利用导数判断函数的单调性，利用导数求函数的最值，文科考查了求曲线的切线方程，导数在研究函数性质中的运用；2015 年文理试卷分别涉及到切线、零点、单调性、最值、不等式证明、恒成立问题；2016 文科考查了导数的几何意义，理科涉及到不等式的证明，含参数的函数性质的研究，极值点偏移；2017 年高考考查了导数判断函数的单调性，含参零点的分类讨论。近四年的高考试题基本形成了一个模式，第一问求解函数的解析式，以切线方程、极值点或者最值、单调区间等为背景得到方程从而确定解析式，或者给出解析式探索函数的最值、极值、单调区间等问题，较为简单；第二问均为不等式相联系，考查不等式恒成立、证明不等式等综合问题，难度较大。**预测 2018 年高考导数大题以对数函数、指数函数、反比例函数以及一次函数、二次函数中的两个或三个为背景，组合成一个函数，考查利用导数研究函数的单调性与极值及切线，不等式结合考查恒成立问题**，另外 2016 年全国卷 1 理考查了极值点偏移问题，这一变化趋势应引起考生注意。

【基础知识整合】

1、导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2、导数的几何意义：导数值 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率

3、常见函数的导数：$C'=0$；$(x^n)'=nx^{n-1}$；$(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$；

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；$(e^x)'=e^x$；$(a^x)'=a^x\ln a$

4、导数的四则运算：$(u\pm v)'=u'\pm v'$；；$(u\cdot v)'=u'v+v'u$；$(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

5、复合函数的单调性：$f'_x(g(x))=f'(u)g'(x)$

6、导函数与单调性：求增区间，解 $f'(x)>0$；求减区间，解 $f'(x)<0$

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是增函数 $\Rightarrow f'(x)\geq 0$ 在 (a,b) 上恒成立；

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是减函数 $\Rightarrow f'(x)\leq 0$ 在 (a,b) 上恒成立；

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上存在增区间 $\Rightarrow f'(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立；

若函数在 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上存在减区间 $\Rightarrow f'(x)<0$ 在 (a,b) 上恒成立；

7、导函数与极值、最值：确定定义域，求导，解单调区间，列表，下结论

8、导数压轴题：强化变形技巧、巧妙构造函数、一定要多练记题型，总结方法

第 1 讲　导数的计算与几何意义

（2016 全国卷 1 理 16）若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$__________ $1-\ln 2$

（2015 全国卷 1 理 21（1））已知函数 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$，当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线　　$a=-\frac{3}{4}$

（2015 安徽卷理 18（1））设 $n\in N^*$，x_n 是曲线 $y=x^{2n+2}+1$ 在点 $(1,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标，求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.　　$x_n=\frac{n}{n+1}$

（2015 重庆卷理 20（1））设函数 $f(x)=\frac{3ax^2+ax}{e^x}(a\in R)$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，确定 a 的值，并求此时曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程　$a=0$，$3x-ey=0$

1、函数 $f(x)=\cos^2 x$ 在点 $(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})$ 处的切线方程为___ $x+y-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=0$ _____

2、过 $f(x)=x^3-3x^2+2x+5$ 图像上一个动点作函数的切线，则切线倾斜角的范围是_ $[0,\frac{\pi}{2})\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$ ____

3、若一直线与曲线 $y=\ln x$ 和曲线 $x^2=ay(a>0)$ 相切于同一点 P，则 $a=$__ $2e$ ___

4、两曲线 $y=x^2-1$ 和 $y=a\ln x-1$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围是__ $(0,2e)$ __

5、已知 a,b 为正实数，直线 $y=x-a$ 与曲线 $y=\ln(x+b)$ 相切，则 $\frac{a^2}{2-b}$ 的取值范围是（C）

（A）$(0,+\infty)$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(0,\frac{1}{2})$　　（D）$[1,+\infty)$

6、若曲线 $y=\frac{1}{2e}x^2$ 与曲线 $y=a\ln x$ 在它们的公共点 $P(s,t)$ 处具有公切线，则实数 $a=$（ C ）

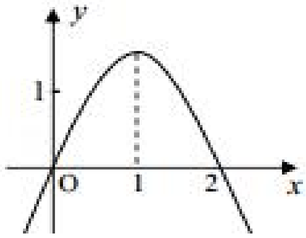
（A）-2　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

7、函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 的可导函数，当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$\frac{2f(x)+xf'(x)}{x-1}>0$，若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $-\frac{3}{4}$，则 $f(1)=$（C ）

（A）0　　（B）1　　（C）$\frac{3}{8}$　　（D）$\frac{1}{5}$

第 2 讲 图像问题

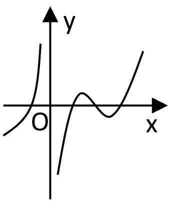
1、已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+c$，其导数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的极大值是（ D ）

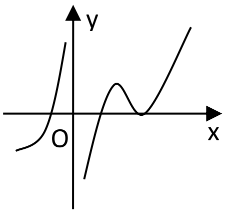


（A） $a+b+c$ （B） $8a+4b+c$

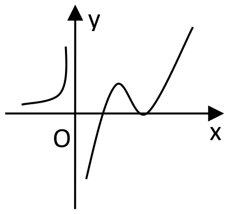
（C） $3a+2b$ （D）c

2、设函数 $y=f(x)$ 可导，$y=f(x)$ 的图象如图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图像可能为（A）

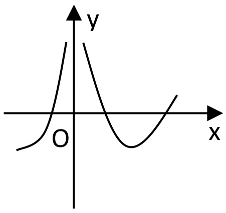




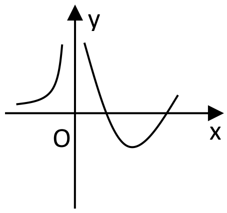
A



B

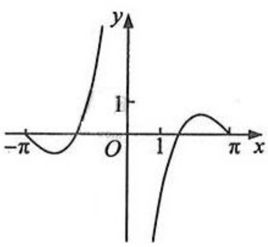


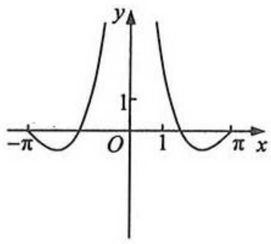
C

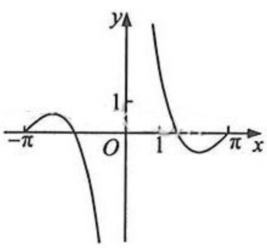


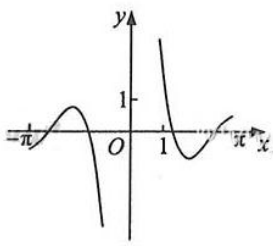
D

3、（2017 全国卷I文 8）函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图像大致为（ C）

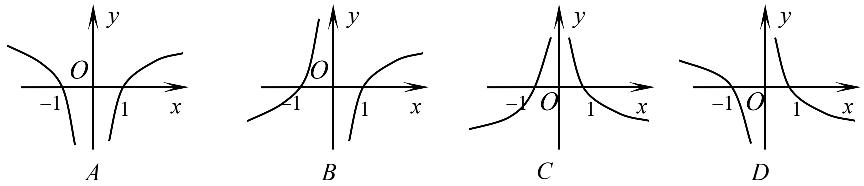
A.


B.


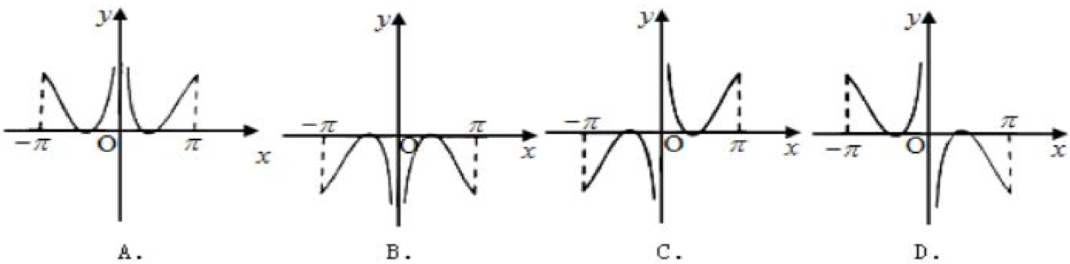
C.


D.


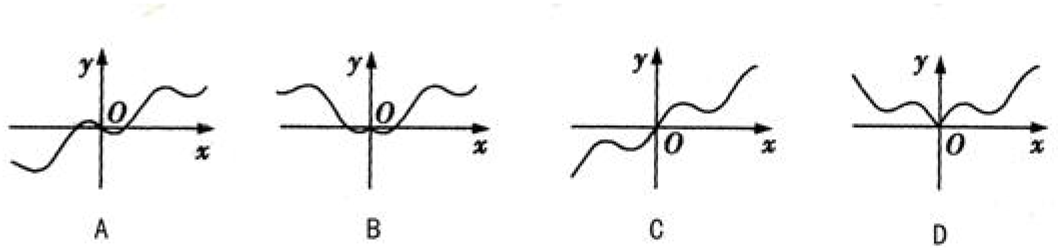
4、函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$ 的图像可能是（ B　）



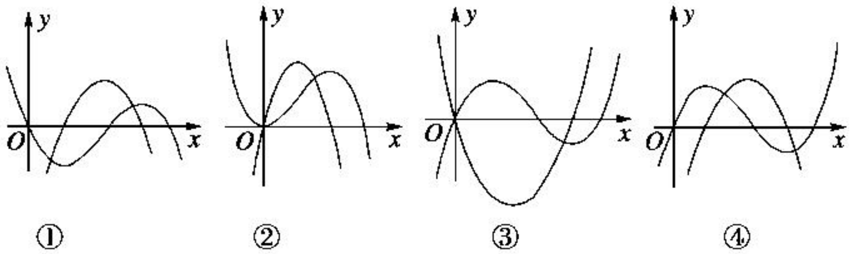
5、函数 $f(x)=(x-\dfrac{1}{x})\cos x(-\pi\le x\le\pi,x\ne 0)$ 的图像可能为（D ）



6、已知 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)$，$f'\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数，则 $f'\left(x\right)$ 的图像是(A)



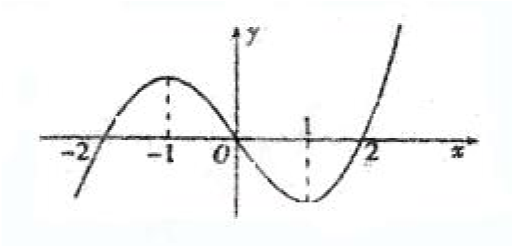
7、下面四图都是在同一坐标系中某三次函数及其导函数的图像，其中一定不正确的序号是（　B）



（A）①②　　　　（B）③④　　　　（C）①③　　　　（D）①④

8、已知 R 上可导函数 $f\left(x\right)$ 的图象如图所示，

则不等式 $\left(x^2-2x-3\right)f'\left(x\right)>0$ 的解集为(D)

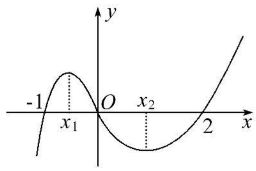


（A） $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　（B） $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(1,2\right)$

（C） $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$　　（D） $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$

9、函数 $f\left(x\right)=x^3+bx^2+cx+d$ 的大致图象如图所示,则 $x_1^2+x_2^2$ 等于(　C　)

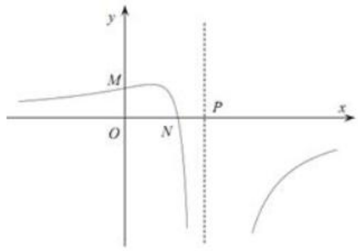
（A） $\frac{8}{9}$　　（B） $\frac{10}{9}$　　（C） $\frac{16}{9}$　　（D） $\frac{4}{5}$



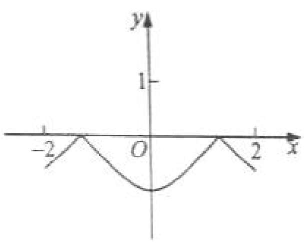
10、（2015 安徽）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{\left(x+c\right)^2}$ 的图像如图所示，则下列结论成立的是（ C ）

（A） $a>0,b>0,c<0$　　（B） $a<0,b>0,c>0$

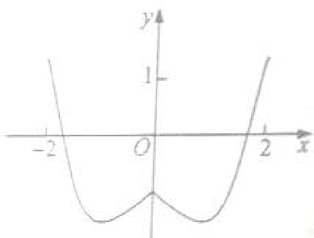
（C） $a<0,b>0,c<0$　　（D） $a<0,b<0,c<0$



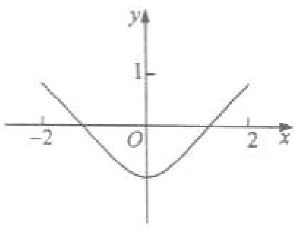
11、（2016 全国卷）函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为（D）



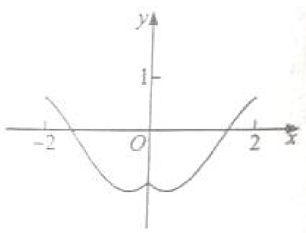
（A）



（B）



（B）



（D）

第 3 讲 三次函数

1、函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+2(m-1)x$ 在 $(0,4)$ 上无极值，则 $m=$__3___

2、已知 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$ 在 $x=-1$ 时有极值 0，则 $a-b=$_-7_

3、设函数 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax$ 有两个不同的极值点 x_1,x_2，且对不等式 $f(x_1)+f(x_2)\le 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_$(-\infty,-1]\cup[\frac{1}{2},2]$__

4、函数 $f(x)=-x^3+3x^2-ax-2a$，若存在唯一正整数 x_0，使得 $f(x_0)>0$，则实数 a 的取值范围是__$[\frac{2}{3},1)$___

5、已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2-x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数，则实数 a 的取值范围是（A ）

（A）$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　（B）$(-\sqrt{3},,\sqrt{3})$

（C）$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$　　（D）$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

6、若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$ 在区间 $(\frac{1}{2},3)$ 上有极值点，则实数 a 的取值范围是（C）

（A）$(2,,\frac{5}{2})$　　（B）$[2,,\frac{5}{2})$　　（C）$(2,,\frac{10}{3})$　　（D）$[2,,\frac{10}{3})$

7、若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2+x+1$ 在区间 $(\frac{1}{2},3)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（C ）

（A）$[\frac{1}{3},+\infty)$　　（B）$[\frac{5}{3},+\infty)$　　（C）$[\frac{10}{3},+\infty)$　　（D）$[\frac{16}{3},+\infty)$

8、若函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{2}{3}$ 在区间 $(a,a+5)$ 上存在最小值，则实数 a 的取值范围是（ C ）

（A）$[-5,0)$　　（B）$(-5,0)$　　（C）$[-3,0)$　　（D）$(-3,0)$

9、若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$ 在 $x=1$ 处取得极大值 10，则 $\frac{b}{a}$ 的值为（ C ）

（A）$-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{3}{2}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

第 4 讲 导数与单调性

1、已知函数 $f(x)=x^2-5x+2\ln x$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间是_$(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$__

2、已知函数 $f(x)=e^x\ln x-ae^x(a\in R)$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调，则 a 的取值范围是_$a\le 1$__

3、设函数 $f(x)=\dfrac{3x^2+ax}{e^x}(a\in R)$，若 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上为减函数，则 a 的取值范围是__$a\ge -\frac{9}{2}$_____

4、若函数 $f(x)$ 在定义域 D 内的某个区间 I 上是增函数，且 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 I 上也是增函数，则称 $y=f(x)$ 是 I 上的“完美函数”，已知 $g(x)=e^x+x-\ln x+1$，若函数 $g(x)$ 是区间 $[\frac{m}{2},+\infty)$ 上的“完美函数”，则整数 m 的最小值为__3______

5、设函数 $f(x)=e^{2x}+ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为（ C ）

（A）$[1,+\infty)$　（B）$(-1,+\infty)$　（C）$[-2,+\infty)$　（D）$(-2,+\infty)$

6、函数 $f(x)=2x^2-\ln x$ 在其定义域内的一个子区间 $(k-1,k+1)$ 内不单调，则 k 的取值范围是（ B ）

（A）$[1,+\infty)$　（B）$[1,\frac{3}{2})$　（C）$[1,2)$　（D）$[\frac{3}{2},2)$

7、若函数 $f(x)=\ln x+ax^2-2$ 在区间 $(\frac{1}{2},2)$ 内存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是（ D ）

（A）$(-\infty,-2]$　（B）$(-2,+\infty)$　（C）$(-2,-\frac{1}{8})$　（D）$[-\frac{1}{8},+\infty)$

8、设 $1<x<2$，则 $\dfrac{\ln x}{x},(\dfrac{\ln x}{x})^2,\dfrac{\ln x^2}{x^2}$ 的大小关系是（ A ）

（A）$(\dfrac{\ln x}{x})^2<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\ln x^2}{x^2}$　（B）$\dfrac{\ln x}{x}<(\dfrac{\ln x}{x})^2<\dfrac{\ln x^2}{x^2}$

（C）$(\dfrac{\ln x}{x})^2<\dfrac{\ln x^2}{x^2}<\dfrac{\ln x}{x}$　（D）$\dfrac{\ln x^2}{x^2}<(\dfrac{\ln x}{x})^2<\dfrac{\ln x}{x}$

9、下列命题为真命题的个数是（ D ）

①$e^{\frac{2}{e}}>2$　②$\ln 2>\frac{2}{3}$　③$\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{1}{e}$　④$\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{\ln\pi}{\pi}$

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

第 5 讲　导数与极最值

1、已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=(x-2a)(x^2+a^2x+2a^2)$ 的极小值点，则 a 的范围是

_$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$__

2、已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=(x-2)e^x-\dfrac{k}{2}x^2+kx(k>0)$ 的极小值点，则 k 的范围是_$(0,e)$_

3、已知函数 $f(x)=x^2-2x+1+a\ln x$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则（ D ）

（A）$f(x_2)<-\dfrac{1+2\ln 2}{4}$　　（B）$f(x_2)<\dfrac{1-2\ln 2}{4}$

（C）$f(x_2)>\dfrac{1+2\ln 2}{4}$　　（D）$f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$

4、若函数 $f(x)=ae^x+3x$ 在 R 上有小于零的极值点，则实数 a 的取值范围是（ B ）

（A）$(-3,+\infty)$　（B）$(-\infty,-3)$　（C）$(-\dfrac{1}{3},+\infty)$　（D）$(-\infty,-\dfrac{1}{3})$

5、已知函数 $f(x)=x(\ln-ax)$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是（ B ）

（A）$(-\infty,0)$　（B）$(0,\dfrac{1}{2})$　（C）$(0,1)$　（D）$(0,+\infty)$

6、若函数 $f(x)=\dfrac{ax^2}{2}-(1+2a)x+2\ln x(a>0)$ 在区间 $(\dfrac{1}{2},1)$ 内有极值，则 a 的取值范围是（ C ）

（A）$(\dfrac{1}{e},+\infty)$　（B）$(1,+\infty)$　（C）$(1,2)$　（D）$(2,+\infty)$

7、若函数 $f(x)$ 在区间 A 上，对 $\forall a,b,c\in A, f(a),f(b),f(c)$ 为一个三角形的三条边，则称函数 $f(x)$ 为“三角形函数”.已知函数 $f(x)=x\ln x+m$ 在区间 $[\dfrac{1}{e^2},e]$ 上是“三角形函数”，则实数 m 的取值范围为（ D ）

（A）$(\dfrac{1}{e},\dfrac{e^2+2}{e})$　（B）$(\dfrac{2}{e},+\infty)$　（C）$(\dfrac{1}{e},+\infty)$　（D）$(\dfrac{e^2+2}{e},+\infty)$

第 6 讲　导数与零点

1、设函数 $f(x)=x^2-2ex-\frac{\ln x}{x}+a$，若函数 $f(x)$ 至少存在一个零点，则实数 a 的取值范围是（　D　）

（A）$(0,,e^2-\frac{1}{e}]$　　（B）$(0,e^2+\frac{1}{e}]$　　（C）$[e^2-\frac{1}{e},+\infty)$　　（D）$(-\infty,e^2+\frac{1}{e}]$

2、已知函数 $f(x)=\frac{me^x}{2}$ 与函数 $g(x)=-2x^2-x+1$ 的图像有两个不相同的交点，则实数 m 的取值范围为（ D　）

（A）$[0,1)$　　（B）$[0,2)\cup\{-\frac{18}{e^2}\}$　　（C）$(0,2)\cup\{-\frac{18}{e^2}\}$　　（D）$[0,2\sqrt{e})\cup\{-\frac{18}{e^2}\}$

3、定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在 $x_1,x_2(a<x_1<x_2<b)$ 满足 $f^{'}(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f^{'}(x_2)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的"双中值函数".已知函数 $f(x)=2x^3-x^2+m$ 是 $[0,2a]$ 上的"双中值函数"，则实数 a 的取值范围是（A　）

（A）$(\frac{1}{8},\frac{1}{4})$　　（B）$(\frac{1}{12},\frac{1}{4})$　　（C）$(\frac{1}{12},\frac{1}{8})$　　（D）$(\frac{1}{8},1)$

4、若存在正实数 m，使得关于 x 的方程 $x+a(2x+4m-4ex)[\ln(x+m)-\ln x]=0$ 有两个不同的根，则实数 a 的取值范围是（ C　）

（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(0,\frac{1}{2e})$　　（C）$(-\infty 0)\cup(\frac{1}{2e},+\infty)$　　（D）$(\frac{1}{2e},+\infty)$

5、（2017.12 成都一诊）若关于 x 的方程 $\frac{x}{e^x}+\frac{e^x}{x-e^x}+m=0$ 有三个不相等的实数解 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<0<x_2<x_3$，其中 $m\in R,e=2.71828...$ 为自然对数的底数，则 $(\frac{x_1}{e^{x_1}}-1)^2(\frac{x_2}{e^{x_2}}-1)(\frac{x_3}{e^{x_3}}-1)$ 的值为（ D）

（A）e　　（B）$1-m$　　（C）$1+m$　　（D）1

6、已知函数 $f(x)=(3x+1)e^{x+1}+mx$，若有且仅有两个整数使得 $f(x)\le 0$，则实数 m 的取值范围为（ B ）

（A）$(\frac{5}{e},2)$　　（B）$[-\frac{5}{2e},-\frac{8}{3e^2})$　　（C）$[-\frac{1}{2},-\frac{8}{3e^2})$　　（D）$[-4e,-\frac{5}{2e})$

第 7 讲　导数中的恒成立与存在性问题

1、（2015 全国卷 1 理 12）设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（D　）

（A）$[-\frac{3}{2e},1)$　　（B）$[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$　　（C）$[\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$　　（D）$[\frac{3}{2e},1)$

2、设函数 $f(x)=e^x(3x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若有且只有一个整数 x_0 使得 $f(x_0)\le 0$，则 a 的取值范围是（ C ）

（A）$(\frac{2}{e},\frac{3}{4})$　　（B）$[\frac{2}{e},\frac{3}{4})$　　（C）$(\frac{2}{e},1)$　　（D）$[\frac{2}{e},1)$

3、已知函数 $f(x)=x(a-\frac{1}{e^x})$，曲线 $y=f(x)$ 上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，则实数 a 的取值范围是（ D）

（A）$(-e^2,+\infty)$　　（B）$(-e^2,0)$　　（C）$(-\frac{1}{e^2},+\infty)$　　（D）$(-\frac{1}{e^2},0)$

4、设函数 $f(x)=\frac{(e^2-a)^2}{4}+(x-a)^2(a\in R)$，若关于 x 的不等式 $f(x)\le\frac{1}{5}$ 有解，则实数 a 的值为（ A ）

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）0　　（D）$\frac{1}{2}$

5、已知 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2(a>0)$，若对任意两个不等的正实数 x_1,x_2，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（D ）

（A）$(0,1]$　　（B）$(1,+\infty)$　　（C）$(0,1)$　　（D）$[1,+\infty)$

6、已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-x^2$，若对 $\forall p,q\in(0,1)$，且 $p\ne q$，有 $\frac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（ C ）

（A）$(-\infty,18)$　　（B）$(-\infty,18]$　　（C）$[18,+\infty)$　　（D）$(18,+\infty)$

7、设函数 $f(x)=e^x(x^2-3x+3)-ae^x-x(x\ge -2)$，若不等式 $f(x)\le 0$ 有解，则实数 a 的最小值为（ A ）

（A）$1-\frac{1}{e}$　　（B）$2-\frac{1}{e}$　　（C）$\frac{1}{e}-1$　　（D）$1+e^2$

8、设函数 $f(x)=e^x(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2)-2ae^x-x$，若不等式 $f(x)\le 0$ 在 $[-2,+\infty)$ 上有解，则实数 a 的最小值为（ C ）

（A）$-\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$　　（B）$-\frac{3}{2}-\frac{2}{e}$　　（C）$-\frac{3}{4}-\frac{1}{2e}$　　（D）$-1-\frac{1}{e}$

9、已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+(x-b)^2}{x}(b\in R)$，若存在 $x\in[\frac{1}{2},2]$，使得 $f(x)>-xf'(x)$，则实数 b 的取值范围是（C ）

（A）$(-\infty,\sqrt{2})$　　（B）$(-\infty,\frac{3}{2})$　　（C）$(-\infty,\frac{9}{4})$　　（D）$(-\infty,3)$

10、已知 $f(x)=xe^x$，$g(x)=-(x+1)^2+a$，若 $\exists x_1,x_2\in R$，使得 $f(x_2)\le g(x_1)$ 成立，则实数 a 的取值范围是_$a\ge-\frac{1}{e}$_______

11、若关于 x 的不等式 $c^2x^2-(cx+1)\ln x+cx\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 c 的取值范围是__$[\frac{1}{e},+\infty)$____

12、若关于 x 的不等式 $(ax-1)(\ln x+ax)\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是__$(-\infty,-\frac{1}{e})\cup\{e\}$_

13、若函数 $f(x)=x-1-a\ln x(a<0)$，$g(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$，且对任意 $x_1,x_2\in[3,4](x_1\ne x_2)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{g(x_1)}-\frac{1}{g(x_2)}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_$[4-\frac{3}{4}e^3,0)$____

14、设函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$，$g(x)=\frac{x}{e^x}$，对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，不等式 $\frac{g(x_1)}{k}\le\frac{f(x_2)}{k+1}$ 恒成立，则正数 k 的取值范围是_$k\ge\frac{1}{2e-1}$___

15、记曲线 $f(x)=-e^x-2x$ 上任意一点处的切线为 l_1，总存在过 $g(x)=ax+3\cos x$ 上一点处的切线为 l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则实数 a 的取值范围是__$[-1,2]$__

第 8 讲 原函数导函数混合还原

一．导数的常见构造

1．对于 $f'(x)>g'(x)$，构造 $h(x)=f(x)-g(x)$

更一般地，遇到 $f'(x)>a(a\neq 0)$，即导函数大于某种非零常数(若 a=0，则无需构造)，

则可构 $h(x)=f(x)-ax$

2．对于 $f'(x)+g'(x)>0$，构造 $h(x)=f(x)+g(x)$

3．对于 $f'(x)+f(x)>0$，构造 $h(x)=e^x f(x)$

4．对于 $f'(x)>f(x)$[或 $f'(x)-f(x)>0$]，构造 $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$

5．对于 $xf'(x)+f(x)>0$，构造 $h(x)=xf(x)$

6．对于 $xf'(x)-f(x)>0$，构造 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

7．对于 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}>0$，分类讨论：(1)若 $f(x)>0$，则构造 $h(x)=\ln f(x)$；

(2)若 $f(x)<0$，则构造 $h(x)=\ln[-f(x)]$；

二. 对于抽象函数而言，在构造函数时我们必须从以下方面考虑：函数的奇偶性、单调性、对称性、周期性等方面考虑，如果题目给出的条件已经是最简的，则从问题入手；否则反向考虑。

例：（2015 课标 2 卷理 12）设函数 $f^{'}(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf^{'}(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（ A ）

（A）$(-\infty,-1)\cup(0,1)$ （B）$(-1,0)\cup(1,+\infty)$ （C）$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ （D）$(0,1)\cup(1,+\infty)$

变式 1.函数 $f(x)$ 的定义域是 R，$f(0)=2$，对任意 $x\in R, f(x)+f'(x)>1$，则不等式 $e^x\cdot f(x)>e^x+1$ 的解集为（A）

（A）$\{x|x>0\}$ （B）$\{x|x<0\}$ （C）$\{x|x<-1或0<x<1\}$ （D）$\{x|x>1或x<-1\}$

变式 2. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$，且有 $3f(x)+xf'(x)>0$，则不等式 $\left(x+2015\right)^3 f(x+2015)+27f(-3)>0$ 的解集是（ A ）

（A）$(-2018,-2015)$　（B）$(-\infty,-2016)$　（C）$(-2016,-2015)$　（D）$(-\infty,-2012)$

变式 3.设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(\mathrm{x})$，$\forall x\in R$，有 $f(x)+f(-x)=x^2$，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上 $f'(x)<x$，若 $f(4-m)-f(m)\ge 8-4m$，则实数 m 的取值范围为（B）

（A）$\left[-2,2\right]$　（B）$\left[2,+\infty\right)$　（C）$\left[0,+\infty\right)$　（D）$\left(-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

课后练习：

1、已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=1$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>x-1$，则不等式 $f(x)<\frac{1}{2}x^2-x+1$ 的解集为（C）

（A）$(-2,2)$　（B）$(2,+\infty)$　（C）$(-\infty,2)$　（D）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

2、已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+2)$ 为偶函数，$f(4)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为（ B ）

（A）$(-2,+\infty)$　（B）$(0,+\infty)$　（C）$(1,+\infty)$　（D）$(4,+\infty)$

3、若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f'(x)>1$，$f(0)=4$，则不等式 $f(x)>\frac{3}{e^x}+1$（e 为自然对数的底数)的解集为（A）

（A）$(0,+\infty)$　（B）$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$　（C）$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　（D）$(3,+\infty)$

4、已知函数 $f(x)$ 对定义域R 内的任意 x 都有 $f(x)=f(4-x)$，且当 $x\neq 2$ 时，其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)>2f'(x)$，若 $2<a<4$，则（ C ）

（A）$f(2^a)<f(3)<f(\log_2 a)$　（B）$f(3)<f(\log_2 a)<f(2^a)$

（C）$f(\log_2 a)<f(3)<f(2^a)$　（D）$f(\log_2 a)<f(2^a)<f(3)$

5、定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：$f\left(x\right)>1-f'\left(x\right), f\left(0\right)=0, f'\left(x\right)$是$f\left(x\right)$ 的导函数，则不等式 $e^x f\left(x\right)>e^x-1$（其中 e 为自然对数的底数）的解集为（ B ）

（A）$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,+\infty\right)$　（B）$\left(0,+\infty\right)$　（C）$\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　（D）$\left(-1,+\infty\right)$

6、已知函数 $y=f\left(x\right)$ 对于任意的 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 满足 $f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x>0$（其中 $f'\left(x\right)$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的导函数），则下列不等式不成立的是（ B ）

（A）$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})<f(\frac{\pi}{4})$　　（B）$\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3})<f(-\frac{\pi}{4})$

（C）$f(0)<\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$　　（D）$f(0)<2f(\frac{\pi}{3})$

7、$f(x), g(x)(g(x)\neq 0)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$，且 $f(-3)=0$，$\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 的解集为（ C ）

（A）$(-\infty,-3)\bigcup(3,+\infty)$　　（B）$(-3,0)\bigcup(0,3)$

（C）$(-3,0)\bigcup(3,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-3)\bigcup(0,3)$

8、函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，对 $\forall x\in$R，都有 $2f'(x)>f(x)$ 成立，若 $f(\ln 4)=2$，则不等式 $f(x)>e^{\frac{x}{2}}$ 的解是（ A ）

（A）$x>\ln 4$　（B）$0<x<\ln 4$　（C）$x>1$　（D）$0<x<1$

9、设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(2)=0$，当 $x>0$ 时，有 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ 恒成立，则不等式 $x^2 f(x)>0$ 的解集为 （ D ）

（A）$(-2,0)\bigcup(2,+\infty)$　　（B）$(-2,0)\bigcup(0,2)$

（C）$(-\infty,-2)\bigcup(2,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-2)\bigcup(0,2)$

10、已知一函数满足 $x>0$ 时，有 $g'(x)=2x^2>\dfrac{g(x)}{x}$，则下列结论一定成立的是（ B ）

（A）$\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\le 3$ （B）$\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\ge 2$ （C）$\dfrac{g(2)}{2}-g(1)<4$ （D）$\dfrac{g(2)}{2}-g(1)\ge 4$

11、定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 f(x)使不等式 $2f(x)<xf'(x)<3f(x)$ 恒成立，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，则（ A ）

（A）$4<\dfrac{f(2)}{f(1)}<8$ （B）$8<\dfrac{f(2)}{f(1)}<16$ （C）$3<\dfrac{f(2)}{f(1)}<4$ （D）$2<\dfrac{f(2)}{f(1)}<3$

12、已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图像关于 y 轴对称，且当 $x<0$ 时，$f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$ 恒成立，设 $a>1$，则 $\dfrac{4af(a+1)}{a+1},2\sqrt{a}f(2\sqrt{a}),(a+1)f(\dfrac{4a}{a+1})$ 的大小关系为（ B ）

（A）$\dfrac{4af(a+1)}{a+1}>2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})>(a+1)f(\dfrac{4a}{a+1})$

（B）$\dfrac{4af(a+1)}{a+1}<2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})<(a+1)f(\dfrac{4a}{a+1})$

（C）$2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})>\dfrac{4af(a+1)}{a+1}>(a+1)f(\dfrac{4a}{a+1})$

（D）$2\sqrt{a}f(2\sqrt{a})<\dfrac{4af(a+1)}{a+1}<(a+1)f(\dfrac{4a}{a+1})$

13、已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $xf'(x)<2f(x)$ 成立，则（ D ）

（A）$2f(\sqrt{3})>3f(\sqrt{2})$ （B）$2f(1)<3f(\sqrt{2})$

（C）$4f(\sqrt{3})<3f(2)$ （D）$4f(1)>f(2)$

14、已知奇函数 $f(x)$ 满足：对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 且 $x_1\ne x_2$，有 $\dfrac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 恒成立，若 $a=2^{0.2}f(2^{0.2}),b=(\ln 2)f(\ln 2),c=(\log_2\dfrac{1}{4})f(\log_2\dfrac{1}{4})$，则 a,b,c 的大小关系为____$b<a<c$__（用“>”表示）

第 9 讲 导数中的距离问题

1、（2012 全国卷 1 理 12）设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为（ B ）

（A）$1-\ln 2$　　（B）$\sqrt{2}(1-\ln 2)$　　（C）$1+\ln 2$　　（D）$\sqrt{2}(1+\ln 2)$

2、直线 $x=m$ 与函数 $f(x)=x^3$ $g(x)=\ln x$ 图像分别交于点 M,N，则 $|MN|$ 最小值为（ A ）

（A）$\frac{1+\ln 3}{3}$　　（B）$\frac{\ln 3}{3}$　　（C）$\frac{1-\ln 3}{3}$　　（D）$\ln 3-1$

3、已知直线 $y=a$ 分别与函数 $y=e^{x+1}$ 和 $y=\sqrt{x-1}$ 交于 A,B 两点，则 A,B 之间的最短距离是（ C ）

（A）$\frac{3-\ln 2}{2}$　　（B）$\frac{5-\ln 2}{2}$　　（C）$\frac{3+\ln 2}{2}$　　（D）$\frac{5+\ln 2}{2}$

4、已知点 M 在曲线 $y=3\ln x-x^2$ 上，点 N 在直线 $x-y+2=0$ 上，则 $|MN|$ 的最小值是

__$2\sqrt{2}$__

5、已知直线 $y=b$ 与函数 $f(x)=2x+3$ 和 $g(x)=ax+\ln x$ 分别交于 M,N 两点，若 $|MN|$ 的最小值为 2，则 $a+b=$__2___

6、若实数 a,b,c,d 满足 $\frac{2a^2-\ln a}{b}=\frac{3c-2}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为__$\frac{1}{10}$__

7、若实数 a,b,c,d 满足 $|b+a^2-4\ln a|+|2c-d+2|=0$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为

__5___

8、已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x>0 \\ \frac{3x}{2}+1, x\le 0 \end{cases}$，若 $m<n$，且 $f(m)=f(n)$，则 $n-m$ 的范围是

$[\frac{7-2e}{3},\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}]$

9、已知函数 $f(x)=\begin{cases} \ln(x+1), x>0 \\ \frac{1}{2}x+1, x\le 0 \end{cases}$，若 $f(x_1)=f(x_2), x_1\ne x_2$，则 $|x_1-x_2|$ 的范围是

_$[3-2\ln 2,2)$__

10、已知函数 $f(x)=(x-m)^3+(x-me^m)^3-2ax(a\in R)$ 在 R 上单调递增，则 a 的取值范围是_$a\le 0$___

第 10 讲 导数解答题

常用函数不等式

$$\begin{cases} x-1\ge \ln x \\ x\ge \ln(x+1) \\ \ln x\ge 1-\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{x^2-1}{2}\ge \ln x \\ x-\dfrac{1}{x}\ge 2\ln x \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}>\ln(n+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x\ge x+1 \\ e^{x-1}\ge x \\ e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2} \\ \dfrac{1}{e^x}\ge 1-x \\ \dfrac{e^{x+1}+e^{x-1}}{2}\ge x+1 \\ \sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{i}<\ln n \end{cases}$$

不等式链：$a\ne b$

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}>(a^a b^b)^{\frac{1}{a+b}}>\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}>\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a+b}{2}>\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2>e^{-1}\left(\frac{b^a}{a^b}\right)^{\frac{1}{b-a}}>\frac{b-a}{\ln b-\ln a}>\sqrt{ab}>\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>e\left(\frac{a^b}{b^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}>\frac{2ab}{a+b}>(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$$

对数均值不等式：

$\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}>\sqrt{ab}$（用来解决极值点偏移问题）

对数不等式（用来证明对数均值不等）

$$\forall 0<x<1,\frac{x-1}{\sqrt{x}}<\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$$

$$\forall x>1,\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

【基础典例分析】

例：已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+a}(a\ge 1)$

（I）讨论 $f(x)$ 零点的个数；

（II）证明：$\dfrac{2}{2n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{3}{3n+1},n\in N^*$

【答案】（Ⅰ）当 $a=1$ 时，1 个零点；当 $1<a<2$ 时，2 个零点；
当 $a=2$ 时，1 个零点；当 $a>2$ 时，2 个零点

（Ⅱ）分别取 $a=2$ 和 $a=3$ 证左右两边

【近七年高考全国卷I】

（2017年高考全国卷I）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增

（Ⅱ）$0<a<1$

（2016年高考全国卷I）已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$ 有两个零点

（I）求 a 的取值范围

（II）设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$

【答案】（Ⅰ）a 的取值范围为 $(0,+\infty)$；

（Ⅱ）极值点偏移问题，构造函数

（2015年高考全国卷I）已知函数 $f(x)=x^{3}+ax+\dfrac{1}{4}$，$g(x)=-\ln x$

（I）当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线

（II）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数

【答案】（Ⅰ）$a=-\dfrac{3}{4}$；

（Ⅱ）当 $a>-\dfrac{3}{4}$ 或 $a<-\dfrac{5}{4}$ 时，1个零点；

当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 或 $-\dfrac{5}{4}$ 时，2个零点；

当 $-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{3}{4}$ 时，3个零点

（2014 年高考全国卷I）设函数 $f(x)=ae^{x}\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $y=e(x-1)+2$

（I）求 a,b

（II）证明：$f(x)>1$

【答案】（ I ） $a=1,b=2$；

（ II ）变形构造，略

（2013 年高考全国卷I）设函数 $f(x)=x^{2}+ax+b$，$g(x)=e^{x}(cx+d)$，若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,2)$，且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$

（I）求 a,b,c,d 的值

（II）若 $x\geq -2$ 时，$f(x)\leq kg(x)$，求 k 的取值范围

【答案】（ I ） $a=4,b=2,c=2,d=2$；

（ II ） k 的取值范围为 $[1,e^{2}]$

（2012 年高考全国卷I）已知函数 $f(x)=f^{'}(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^{2}$

（I）求 $f(x)$ 的解析式及单调区间

（II）若 $f(x)\geq \frac{1}{2}x^{2}+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值

【答案】（ I ） $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=e^{x}-x+\frac{1}{2}x^{2}$；

单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$

（ II ） $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$

（2011 年高考全国卷I）已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$

（I）求 a,b 的值　　　　$a=1,b=1$

（II）如果当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$，求 k 的取值范围　　$k\leq 0$

10.1 导数基础练习题

1、已知函数 $f(x)=x-\ln x$， $g(x)=x^2-ax$

（I）求函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1](t>0)$ 上的最小值 $m(t)$

（II）令 $h(x)=g(x)-f(x)$， $A(x_1,h(x_1))$， $B(x_2,f(x_2))(x_1\neq x_2)$ 是函数 $h(x)$ 图像上任意两点，且满足 $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$，求实数 a 的取值范围

（III）若 $\exists x\in(0,1]$，使 $f(x)\geq\dfrac{a-g(x)}{x}$ 成立，求实数 a 的最大值

【答案】（ I ）当 $0<t<1$ 时， $m(t)=1$；

当 $t\geq 1$ 时， $m(t)=t-\ln t$

（ II ） a 的取值范围为 $a\leq 2\sqrt{2}-2$

（III）实数 a 的最大值为 1

2、已知函数 $f(x)=x\ln x$， $g(x)=-x^2+ax-3$

（I）求函数 $f(x)$ 在 $[t,t+2](t>0)$ 上的最小值

（II）若存在 $x_0\in[\dfrac{1}{e},e]$， $2f(x_0)\geq g(x_0)$ 成立，求实数 a 的取值范围

【答案】（ I ）当 $0<t<\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$；

当 $t\geq\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)_{\min}=t\ln t$

（ II ） a 的取值范围为 $a\leq 3e+\dfrac{1}{e}-2$

3、已知函数 $f(x)=x\ln x$， $g(x)=-x^2+ax-2$

（I）求函数 $f(x)$ 在 $[t,t+2](t>0)$ 上的最小值

（II）若函数 $y=f(x)+g(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 且 $x_2-x_1>\ln 2$，求实数 a 的取值范围

【答案】（ I ）当 $0<t<\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$；

当 $t\geq\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)_{\min}=t\ln t$

（ II ） a 的取值范围为 $a>\dfrac{2}{3}\ln 2-\ln(\dfrac{\ln 2}{3})-1$

4、已知函数 $f(x)=\ln x$， $g(x)=\frac{1}{2}x^2-bx$

（I）函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线与函数 $g(x)$ 的图像相切，求实数 b 的值

（II）若函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 在定义域上存在单调递减区间，求实数 b 的取值范围

（III）若 $b\geq 2$， $\forall x_1,x_2\in[1,2]$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|>\left|g(x_1)>g(x_2)\right|$ 成立，求实数 b 的取值范围

【答案】（Ⅰ） $b=-1\pm\sqrt{2}$

（Ⅱ） b 的取值范围为 $b>2$

（Ⅲ） b 的取值范围为 $b=2$

5、设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$， $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{e^x}$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）证明：当 $x>1$ 时， $g(x)>0$

（III）确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x)>g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 区间内恒成立

【答案】（Ⅰ）当 $a\leq 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2a}}{2a})$ 上单调递减，在 $(\frac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$ 上单调递增

（Ⅱ）变形 $\forall x>1,e^x-ex>0$

（Ⅲ） a 的取值范围为 $[\frac{1}{2},+\infty)$

6、函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-bx$，函数 $f(x)=x+a\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直

（I）求实数 a 的值

（II）若函数 $g(x)$ 存在单调递减区间，求实数 b 的取值范围

（III）设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $b\geq\frac{7}{2}$，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值

【答案】（Ⅰ） $a=1$；

（Ⅱ） $b>3$

（Ⅲ） $\frac{15}{8}-2\ln 2$

7、已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{a+1}{2}x^2+1$

（I）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{e},e]$ 上的最值

（II）讨论函数 $f(x)$ 的单调性

（III）当 $-1<a<0$ 时，有 $f(x)>1+\frac{a}{2}\ln(-a)$ 恒成立，求 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{5}{4}, f(x)_{\max}=f(e)=\frac{1}{2}+\frac{e^2}{4}$

（Ⅱ）当 $a\geq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{-a}{a+1}},+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\sqrt{\frac{-a}{a+1}})$ 上单调递减

（III）a 的取值范围为 $(\frac{1}{e}-1,0)$

8、已知函数 $f(x)=ax+x\ln x$ 图像在点 $x=e$ 处的切线的斜率为 3

（I）求实数 a 的值

（II）若 $f(x)\leq kx^2$ 对任意 $x>0$ 成立，求实数 k 的取值范围

（III）当 $n>m>1(m,n\in N^*)$ 时，证明：$\frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[m]{n}}>\frac{m}{n}$

【答案】（Ⅰ）$a=1$；

（Ⅱ）分参构造，$k\geq 1$

（III）取对数，构造 $h(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$

9、已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0，其中 $a>0$，设函数 $g(x)=\ln x+\frac{m}{x}$

（I）求 a 的值

（II）对任意 $x_1>x_2>0$，$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围

（III）讨论方程 $g(x)=f(x)+\ln(x+1)$ 在 $[1,+\infty)$ 上根的个数

【答案】（Ⅰ）$a=1$；

（Ⅱ）移项构造，$m\geq\frac{1}{4}$

（III）$m\geq 1$，1 个根；$m<1$，无根

10、已知函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）当 $f(x)$ 有最大值时，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；

（Ⅱ）$(0,1)$

10.2 分离参数类

11、已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x(a<0)$

（I）若函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增，求实数 a 的取值范围

（II）若 $a=-\frac{1}{2}$，且关于 x 的方程 $f(x)=-\frac{1}{2}x+b$ 在 $[1,4]$ 上恰有两个不等的实根，求实数 b 的取值范围

【答案】（Ⅰ）$a\le -1$；

（Ⅱ）$(\ln 2-2,-\frac{5}{4})$

12、已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+a(x-\ln x)$

（I）当 $a>0$ 时，试求 $f(x)$ 的单调区间

（II）若函数 $f(x)$ 在 $x\in(\frac{1}{2},2)$ 上有三个不同的极值点，求实数 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减；

（Ⅱ）$-2\sqrt{e}<a<-e$

13、已知函数 $f(x)=e^x+ax-a$ ， $g(x)=2xe^x$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）若不等式 $f(x)>g(x)$ 有唯一正整数解，求实数 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）当 $a\ge 0$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln(-a))$ 上单调递减；

（Ⅱ）$(3e^2,\dfrac{5e^3}{2})$

14、已知函数 $f(x)=(x^2-ax-a)e^x$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）若 $a\in(0,2)$，对于任意 $x_1,x_2\in[-4,0]$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<4e^{-2}+me^a$ 恒成立，求 m 的取值范围

【答案】（Ⅰ）当 $a\le -2$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a=-2$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>-2$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,-2),(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,a)$ 单调递减

（Ⅱ）$m>\dfrac{1+e^2}{e^2}$

15、已知函数 $f(x)=\ln x-x+a+1$

（I）若存在 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x)\ge 0$ 成立，求实数 a 的取值范围

（II）求证：当 $x>1$ 时，在（I）的条件下，$\dfrac{1}{2}x^2+ax-a>x\ln x+\dfrac{1}{2}$ 成立

【答案】（Ⅰ） $a\ge 0$；

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；

（Ⅱ）略

10.2 构造新函数类

16、已知函数 $f(x)=mx-a\ln x-m$， $g(x)=\dfrac{ex}{x^2}$

（I）求 $g(x)$ 的极值

（II）设 $m=1,a<0$，若对任意的 $x_1,x_2\in[3,4](x_1<x_2)$，$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\left|\dfrac{1}{g(x_1)}-\dfrac{1}{g(x_2)}\right|$ 恒成立，求 a 的最大值

（III）设 $a=2$，若对 $\forall x_0\in(0,e]$，在区间 $(0,e]$ 上总存在 $t_1,t_2(t_1\neq t_2)$，使得 $f(t_1)=f(t_2)=g(x_0)$ 成立，求 m 的取值范围（*）

【答案】（I） $g(x)$ 的极大值为 $g(1)=1$，无极小值；

（II） a 的最大值为 $3-\dfrac{2}{3}e^2$

（III） m 的取值范围为 $[\dfrac{3}{e-1},+\infty)$

17、已知 $f(x)=e^{2x}+\ln(x+a)$

（I）当 $a=1$ 时，① $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程；②当 $x\geq 0$ 时，求证：$f(x)\geq(x+1)^2+x$

（II）若存在 $x_0\in[0,+\infty)$，使得 $f(x_0)<2\ln(x_0+a)+x_0^2$ 成立，求实数 a 的取值范围

【答案】（I）①切线方程为 $y=3x+1$；　②二阶导可证

（II） a 的取值范围为 $a>e$

18、已知函数 $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}-a\ln x(a\in R)$

（I）当 $a=3$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间

（II） $g(x)=f(x)-x+2a\ln x$， $g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，其中 $x_1<x_2$，若 $g(x_1)-g(x_2)>t$ 恒成立，求 t 的取值范围

【答案】（I） $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{2}),(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{2},1)$；

（II） t 的取值范围为 $t\leq 0$

19、已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax$ 有两个极值点

（I）求实数 a 的取值范围

（II）设 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1,x_2，若不等式 $f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，求 λ 的最小值

【答案】（Ⅰ）a 的取值范围为 $a>4$

（III）λ 的最小值为 $\ln 4-3$

20、记 $\max\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最大值，如 $\max\{3,\sqrt{10}\}=\sqrt{10}$，函数 $f(x)=\max\{x^2-1,2\ln x\}$，$g(x)=\max\{x+\ln x,ax^2+x\}$

（I）求函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上的值域

（II）试探讨是否存在实数 a，使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，请说明理由

【答案】（Ⅰ）$f(x)$ 的值域为 $[-\frac{3}{4},3]$；

（Ⅱ）存在，a 的取值范围为 $\frac{\ln 2-1}{4}<a\le 0$

21、已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，$g(x)=a\ln x$

（I）若曲线 $y=f(x)-g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $6x-2y-5=0$，求实数 a 的值

（II）设 $h(x)=f(x)+g(x)$，若对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，都有 $\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

（III）若在 $[1,e]$ 上存在一点 x_0，使得 $f'(x_0)+\frac{1}{f'(x_0)}<g(x_0)-g'(x_0)$ 成立，求 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）$a=-2$；

（Ⅱ）a 的取值范围为 $[1,+\infty)$

（III）a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(\frac{e^2+1}{e-1},+\infty)$

22、已知函数 $f(x)=\ln x-x^2+x$

（I）证明：当 $a\ge 2$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)<(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1$ 恒成立

（II）若正实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)+2f(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$，证明：$x_1+x_2\ge\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】（Ⅰ）略

（Ⅱ）略

23、（2017 天津）已知定义在 R 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点 x_0， $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数

（I）求函数 $g(x)$ 的单调区间

（II）设 $m\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$，函数 $h(x)=(m-x_0)g(x)-f(m)$，求证： $h(m)h(x_0)<0$

【答案】（Ⅰ） $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1),(\frac{1}{4},+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,\frac{1}{4})$；

（Ⅱ）略*

10.4 导数中的函数不等式放缩

例：证明：（1）$e^x > \ln x + 2$　　（2）$e^x \geq \sin x + 1$

（1）$e^x \geq x + 1 \geq \ln x + 2$　　（2）$e^x \geq x + 1 \geq \sin x + 1$

24、已知 $f(x) = e^{x-1} - a(x+1)(x \geq 1)$，$g(x) = (x-1)\ln x$

（I）若 $f(x) \geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

（II）若在（I）的条件下，当 a 取最大值时，求证：$f(x) > g(x)$

【答案】（Ⅰ）$a \leq \dfrac{1}{2}$；

（Ⅱ）$f(x) > g(x) \Leftrightarrow e^{x-1} - \dfrac{x+1}{2} \geq (x-1)\ln x, x \geq 1$

利用 $x - 1 \geq \ln x$ 放缩

25、已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$，曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = bx + 1$

（I）求 a, b 的值

（II）求函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值

（III）证明：当 $x > 0$ 时，$e^x + (1-e)x - x\ln x - 1 > 0$

【答案】（Ⅰ）$a = 1, b = e - 2$；

（Ⅱ）$f(x)$ 的最大值为 $f(1) = e - 1$

（III）略（*）

26、证明：$e^{-x} > -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{8}$

【答案】直接构造（隐零点）；等价变形 $(5-4x^2)e^x - 8 \leq 0$

10.5 导数中的卡根思想

例 1：已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2(a\in R)$

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间

（II）若关于 x 的不等式 $f(x)\le(a-1)x-1$ 恒成立，求整数 a 的最小值

【答案】（Ⅰ）当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$ 上单调递减；

（Ⅱ）2

例 2：已知函数 $f(x)=x+\ln x$，$f^{'}(x)>\frac{k}{\ln(x+1)+1}$ 恒成立，求整数 k 的最大值

【答案】整数 k 的最大值 3

例 3：已知函数 $f(x)=x+x\ln x$，若 $k\in Z$，$(k-2)(x-2)<f(x)$ 对 $\forall x>2$ 恒成立，求 k 的最大值

【答案】k 的最大值为 6

27、已知函数 $f(x)=\ln x$， $h(x)=ax(a\in R)$

（I）函数 $f(x)$ 的图像与 $h(x)$ 的图像无公共点，求实数 a 的取值范围

（II）是否存在实数 m，使得对任意的 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$，都有函数 $y=f(x)+\frac{m}{x}$ 的图像在 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 的图像的下方？若存在，请求出整数 m 的最大值；若不存在，请说明理由

（参考数据：$\ln 2=0.6931, \ln 3=1.0986, \sqrt[3]{e}=1.3956$）

【答案】（Ⅰ）$a>\frac{1}{e}$；

（Ⅱ）$m=1$

28、已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+bx$， $g(x)=xe^x+b$， $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x-1$

（I）求实数 a,b 的值

（II）求证： $f(x)\le g(x)$

【答案】（Ⅰ）$a=1,b=1$；

（Ⅱ）略

10.6 洛必达法则应用

29、已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，若对任意的 $x>0$，$f(x)<kx^2-\dfrac{1}{2}x+1$ 恒成立，求 k 的最小值

【答案】k 的最小值为 $\dfrac{1}{3}$

30、已知函数 $f(x)=(1-kx)\ln(x+1)$，若对任意的 $0<x<1$，$f(x)\geq x$ 恒成立，求 k 的取值范围

【答案】k 的取值范围为

31、已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2-x$

（I）当 $a>0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）$a\geq\dfrac{1}{8}$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$0<a<\dfrac{1}{8}$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4}),(\dfrac{1+\sqrt{1-8a}}{4},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4},\dfrac{1+\sqrt{1-8a}}{4})$ 单调递减

（Ⅱ）$a\geq -1$

10.7 先构造，再赋值，证明和式或积式不等式

32、（2017 全国卷III理 21）已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$

（I）若 $f(x)\ge 0$ 恒成立，求 a 的值

（II）设 m 为整数，且对于任意正整数 n，$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})<m$，求 m 的最小值

【答案】（Ⅰ）$a=1$

（Ⅱ）$m_{\min}=3$

33、已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-ax+2$

（I）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程

（II）若函数 $f(x)$ 在定义域上具有单调性，求实数 a 的取值范围

（III）求证：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\ln(n+1), n\in N^*$

【答案】（1）$y=x$

（Ⅱ）$a\le 2$

（III）略

34、已知函数 $f(x)=\ln(x+1)$，$g(x)=\frac{x^2+2x+a}{x+2}$

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间及最值

（II）若对 $\forall x>0, f(x)+g(x)>1$ 恒成立，求 a 的取值范围

（III）求证：$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2n+1}<\ln(n+1)(n\in N^*)$

【答案】（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$

其最大值为 $f(0)=0$，无最小值

（Ⅱ）$a\ge 2$

（III）略

35、已知函数 $f(x)=a(x^2-1)-\ln x$

（I）若 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的值

（II）若 $f(x)\geq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围

（III）求证：$\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\ldots\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{3n^2-n-2}{2n^2+2n}$

【答案】（Ⅰ）$a=\dfrac{1}{8}$

（Ⅱ）$a\geq\dfrac{1}{2}$

（III）略

36、已知函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}(a>0)$

（I）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的极值

（II）若 $a\in(\dfrac{1}{2},1)$，$f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，试比较 $f(x_1)+f(x_2)$ 与 $f(0)$ 的大小

（III）求证：$\dfrac{n(n-1)}{e^2}>n!(n\geq 2,n\in N)$

【答案】（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=\ln 2-1$，无极大值

（Ⅱ）$f(x_1)+f(x_2)>f(0)$

（III）略

37、已知函数 $f(x)=ax\ln x-x+1(x\in R)$，且 $f(x)\geq 0$

（1）求 a；

（2）求证：当 $n\in N^*$ 时，$\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\dfrac{1}{n^2+3}+\ldots+\dfrac{1}{4n^2}<2\ln 2$

【答案】（Ⅰ）$a=1$

（Ⅱ）略

10.8 极值点偏移问题

38、已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则下面说法正确的是（　　）

（A）$x_1+x_2<2$　　　　（B）$a<e$

（C）$x_1x_2>1$　　　　（D）有极小值点 x_0，且 $x_1+x_2<2x_0$

【答案】D

39、已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x-3$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$

（I）求证：$0<a<e^2$

（II）求证：$x_1+x_2>2a$

【答案】略

40、已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}ax^2+(a-1)x+\ln x,a\in R$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(1-x)<f(1+x)$

（III）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，比较 $f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})$ 与 0 的大小，并证明你的结论

【答案】（Ⅰ）$a<-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,-\dfrac{1}{a}),(1,+\infty)$ 上递增，在 $(-\dfrac{1}{a},1)$ 上递减

$a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增

$-1<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1),(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上递增，在 $(1,-\dfrac{1}{a})$ 上递减

$a\geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减

（Ⅱ）略

（III）$f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})>0$

41、设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a-1)x-a\ln x$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）若 $f(x)=b$ 有两个不相等的实数根 $x_1<x_2$，求证：$f^{'}(\frac{x_1+x_2}{2})>0$

【答案】（Ⅰ）$a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上递增

$a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上递减，在 $(a,+\infty)$ 上递增

（Ⅱ）略

42、已知函数 $f(x)=x^2+\ln(x+a)$

（I）讨论函数 $f(x)$ 的单调性

（II）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，求证：无论实数 a 取什么都有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$

【答案】（Ⅰ）$a\le\sqrt{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上递增

$a>\sqrt{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-a,\frac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}),(\frac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2},+\infty)$ 上递增，

在 $(\frac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2},\frac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2})$ 上递减

（Ⅱ）略

43、已知函数 $f(x)=\frac{m}{x}+\frac{1}{2}\ln x-1$ 的两个零点为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$

（I）求实数 m 的取值范围

（II）求证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{e}$

【答案】（Ⅰ）$0<m<\frac{e}{2}$

（Ⅱ）略

10.9 多元变量消元思想

44、已知函数 $f(x)=\ln\frac{1}{x}-ax^2+x(a>0)$

（I）若 $f(x)$ 是定义域上不单调的函数，求 a 的取值范围

（II）若 $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1,x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)>3-2\ln 2$

【答案】（Ⅰ）$0<a<\frac{1}{8}$

（Ⅱ）略

45、已知函数 $f(x)=x^2-1-a\ln(1-x)$

（I）若函数 $f(x)$ 为定义域上的单调函数，求实数 a 的取值范围

（II）若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$\frac{f(x_1)}{x_2}>\frac{f(x_2)}{x_1}$

【答案】（Ⅰ）$a>\frac{1}{2}$

（Ⅱ）略

46、已知函数 $f(x)=\ln x$

（I）若曲线 $g(x)=f(x)+\frac{a}{x}-1$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 平行，求 a 的值

（II）若 $h(x)=f(x)-\frac{b(x-1)}{x+1}$ 在定义域上是增函数，求实数 b 的取值范围；

（III）若 $m>n>0$，求证：$\frac{m-n}{m+n}<\frac{\ln m-\ln n}{2}$

【答案】（Ⅰ）$a=4$

（Ⅱ）$b\le 2$

（Ⅲ）略

47、已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $x+y+3=0$

（I）求函数 $f(x)$ 的解析式

（II）设 $g(x)=\ln x$，当 $x\in[1,+\infty)$ 时，求证：$g(x)\ge f(x)$

（III）已知 $0<a<b$，求证：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$

【答案】（Ⅰ）$f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+1}$

（Ⅱ）$g(x)\ge f(x)\Leftrightarrow \forall x\ge 1, x^2\ln x+\ln x-2x+2\ge 0$

（Ⅲ）略

48、已知函数 $f(x)=\ln x+mx(m\in R)$

（I）讨论函数 $f(x)$ 的单调区间

（Ⅱ）当 $m\le -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，设 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2$ 的两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 恰为 $h(x)=2\ln x-ax-x^2$ 的零点，求 $y=(x_1-x_2)h(\dfrac{x_1+x_2}{2})$ 的最小值

【答案】（Ⅰ）当 $m\ge 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增

当 $m<0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0,-\dfrac{1}{m})$，

单调递减区间为 $(-\dfrac{1}{m},+\infty)$

（Ⅱ）$2\ln 2-\dfrac{4}{3}$

10.10 导数解决含有 $\ln x$ 与 e^x 的证明题（凹凸反转）

49、设函数 $f(x)=\ln x-e^{1-x},g(x)=a(x^2-1)-\dfrac{1}{x}$

（I）判断函数 $y=f(x)$ 零点的个数，并说明理由

（II）记 $h(x)=g(x)-f(x)+\dfrac{e^x-ex}{xe^x}$，讨论 $h(x)$ 的单调性

（III）若 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）零点个数为 1

（Ⅱ）$a\le 0$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增

$a>0$ 时，函数 $h(x)$ 在 $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2a},+\infty)$ 上递增，在 $(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{2a})$ 上递减

（III）$a\ge\dfrac{1}{2}$

50、设函数 $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}$，证明：$f(x)>1$

【答案】$f(x)>1\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{2}{ex}-\dfrac{1}{e^x}>0$

51、设函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}(1-x-x\ln x)$，证明：$f(x)<1+\dfrac{1}{e^2}$

【答案】略

52、设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-x$

（I）当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$ 的极值

（II）当 $a=1$ 时，证明：$f(x)-\dfrac{1}{e^x}+x>0$ 在 $(0,+\infty)$

【答案】（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(2)=\ln-3$，无极小值

（Ⅱ）略

10.11 导数解决含三角函数式的证明

53、已知函数 $f(x)=\sin+\tan x-2x$

（1）证明：函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增

（2）若 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$， $f(x)>mx^2$，求 m 的取值范围

【答案】（Ⅰ）略

（Ⅱ） $m\le 0$

54、已知函数 $f(x)=\ln(e^x+a)$ 是实数集 R 上的奇函数，函数 $g(x)=\lambda f(x)+\sin x$ 是区间 $[-1,1]$ 上的减函数

（I）求 a 的值

（II）若 $g(x)\le t^2+\lambda t+1$ 在 $x\in[-1,1]$ 及 λ 所在的取值范围上恒成立，求 t 的取值范围

（III）讨论关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{f(x)}=x^2-2ex+m$ 的根的个数

【答案】（Ⅰ） $a=0$

（Ⅱ） $t\le -1$

（Ⅲ）当 $m>e^2+\frac{1}{e}$ 时，方程无解

当 $m>e^2+\frac{1}{e}$ 时，方程有一个根

当 $m<e^2+\frac{1}{e}$ 时，方程有 2 个根

55、已知函数 $f(x)=ax^2+2x+b\cos x$ 在点 $P(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y=\frac{3\pi}{4}$

（I）求 a,b 的值

（II）若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $0<x_1<x_2<\pi$，求证： $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$

（参考公式： $\cos\theta-\cos\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$ ）

【答案】（Ⅰ） $a=-\frac{1}{\pi},b=1$

（Ⅱ）略

56、设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x-1$

（I）求证：当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$

（II）若不等式 $e^{ax}\geq \sin x-\cos x+2$ 对任意的 $x\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）略

（Ⅱ）$a\geq 1$

57、已知函数 $f(x)=e^x\sin x$

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间

（II）如果对于任意的 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$f(x)\geq kx$ 恒成立，求实数 k 的取值范围

（III）函数 $F(x)=f(x)+e^x\cos x, x\in[-\dfrac{2015\pi}{2},\dfrac{2017\pi}{2}]$，过点 $M(\dfrac{\pi-1}{2},0)$ 作函数 $F(x)$ 的图像的所有切线，令各切点的横坐标构成数列 $\{x_n\}$，求数列 $\{x_n\}$ 的所有项之和 S 的值

【答案】（Ⅰ）$f(x)$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}](k\in Z)$，

单调递减区间为 $[2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{7\pi}{4}](k\in Z)$

（Ⅱ）$k\leq 1$

（Ⅲ）$S=1008\pi$

58、已知 $f(x)=\sin x-\cos x-ax$

（I）若 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调，求实数 a 的取值范围

（II）证明：当 $a=\dfrac{2}{\pi}$ 时，$f(x)\geq -1$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立

【答案】（Ⅰ）a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[\sqrt{2},+\infty)$，

（Ⅱ）略

10.12 隐零点问题

59、设函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax-2$.

（I）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（II）若 $a=1$，k 为整数，且当 $x>0$ 时，$\left(x-k\right)f'\left(x\right)+x+1>0$，求 k 的最大值.

【答案】（Ⅰ）当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln a,+\infty)$，

单调递减区间为 $(-\infty,\ln a)$

（Ⅱ）2

60、已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-\ln\left(x+m\right)$.

(I)设 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，求 m ,并讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(II)当 $m\le 2$ 时，证明 $f\left(x\right)>0$.

【答案】（Ⅰ）$m=1$

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,0)$

（Ⅱ）$m\le, f(x)>0 \Leftrightarrow e^{x}-\ln(x+m)>e^{x}-\ln(x+2)>0$

61、已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}x^{3}+x^{2}+ax+1$ 在 $\left(-1,0\right)$ 上有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$.

(I)求实数 a 的取值范围；

(II)证明：$f\left(x_2\right)>\dfrac{11}{12}$.

【答案】（Ⅰ）$0<a<\dfrac{1}{2}$

（Ⅱ）$f(x_2)=-\dfrac{4}{3}x_2^{3}-x_2^{2}+1$

62、已知 $a\in R$，函数 $f\left(x\right)=e^{x}+ax^{2}$；$g\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的导函数.

（I）当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（II）当 $a>0$ 时，求证：存在唯一的 $x_0\in\left(-\dfrac{1}{2a},0\right)$，使得 $g\left(x_0\right)=0$；

（III）若存在实数 a,b，使得 $f\left(x\right)\geq b$ 恒成立，求 $a-b$ 的最小值.

【答案】（ I ）当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$

（ II ）略

（III）$(a-b)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$

63、已知函数 $f\left(x\right)=-2\left(x+a\right)\ln x+x^{2}-2ax-2a^{2}+a$，其中 $a>0$.

（I）设 $g\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的导函数，讨论 $g\left(x\right)$ 的单调性；

（II）证明：存在 $a\in\left(0,1\right)$，使得 $f\left(x\right)\geq 0$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 内恒成立，且 $f\left(x\right)=0$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 内有唯一解.

【答案】（ I ）当 $a\geq\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 单调递增区间为 $(0,+\infty)$

当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}),(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$

单调递减区间为 $(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2})$

（ II ）略

10.13 端点效应

64、（2007 全国I卷理）设函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}$，若对所有 $x\geq 0$，都有 $f(x)\geq ax$，求 a 的取值范围

【答案】a 的取值范围为 $a\leq 2$

65、（2012 天津理）设函数 $f(x)=x-\ln(x+1)$，若对任意的 $x\geq 0$，有 $f(x)\leq kx^{2}$，求实数 k 的最小值

【答案】k 的最小值为 $\frac{1}{2}$

66、（2012 大纲理）设函数 $f(x)=ax+\cos x, x\in[0,\pi]$，设 $f(x)\leq 1+\sin x$，求 a 的取值范围

【答案】a 的取值范围为 $a\leq\frac{2}{\pi}$

67、（2016 全国II卷文）已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$，若对 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围

【答案】a 的取值范围为 $a\leq 2$

10.14 其它省市高考导数真题研究

（2008 江西理 22）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\dfrac{ax}{ax+8}},x\in(0,+\infty)$

（I）当 $a=8$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间

（II）对于任意正数 a，证明：$1<f(x)<2$

【答案】（Ⅰ）$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$

（Ⅱ）略

（2008 辽宁理 22）设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$

（I）求 $f(x)$ 的单调区间和极值

（II）是否存在实数 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\geq a$ 的解集为 $(0,+\infty)$？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，试说明理由

【答案】（Ⅰ）$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$

$f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\ln 2$，无极小值

（Ⅱ）$a\leq 0$

（2014 湖北卷理 22）π 是圆周率，$e=2.71828\ldots$为自然对数的底数

（I）求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间

（II）求 $e^3,3^e,e^\pi,\pi^e,3^\pi,\pi^3$ 这 6 个数中最大数和最小数

（III）将 $e^3,3^e,e^\pi,\pi^e,3^\pi,\pi^3$ 这 6 个按从小到大的顺序排列，并证明你的结论

【答案】（Ⅰ）$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$，单调递减区间为 $(e,+\infty)$

（Ⅱ）最大的数为 3^π，最小的数为 3^e

（III）$3^e<e^3<\pi^e<e^\pi<\pi^3<3^\pi$

（2014 湖南卷理 22）已知常数 $a>0$，函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}$

（I）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性

（II）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，且 $f(x_1)+f(x_2)>0$，求 a 的取值范围

【答案】（Ⅰ）当 $a\geq 1$ 时，$f(x)$ 单在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a},+\infty)$

单调递减区间为 $(0,\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a})$

（Ⅱ）$(\dfrac{1}{2},1)$