国内舒尔凸函数研究综述

石焕南

（北京联合大学师范学院，北京 100011）

摘要：回顾 2003 年以来国内 Schur-凸函数研究的进展，着重介绍国内学者应用 Schur 凸函数理论于解析不等式研究所取得的成绩，并对今后的研究提出了几点建议.

关键词：Schur-凸函数；解析不等式；Schur-几何凸函数；Schur-调和凸函数；Schur-幂凸函

中图分类号：O178 **文献标识码**：A **文章编号**：2095-3798(2017)05-0012-11

0 引言

1979 年，Marshall 和 Olkin 合作出版了《Inequalities: Theory of Majorization and Its Application》[1]一书，以此为标志，受控理论（亦称控制不等式理论）成为数学的一门独立的新兴学科.1979 年 9 月至 1981 年 9 月，北京师范大学的王伯英教授在美国加州大学（UCSB）做访问学者，期间学习了这一理论.回国后于 1984 年在国内率先开设了有关受控理论的硕士研究生课程《矩阵与控制不等式》.1990 年，王伯英教授编著的《控制不等式基础》[2]一书正式出版，该书除精选了 Marshall 和 Olkin 一书中的经典基础理论以外，还包含了不少王伯英教授精彩的独创内容.在应用部分，该书着重讨论了受控理论在矩阵上的应用.

如王伯英教授所言“控制不等式几乎渗入到各个数学领域，而且处处扮演着精彩角色，原因是它常能深刻地描述许多数学量之间的内在关系，从而便于推得所需的结论，它还能把许多已有的从不同方法得来的不等式用一种统一的方法简便地推导出来，它更是推广已有的不等式，发现新的不等式的一种强有力手段，控制不等式的理论和应用有着美好的发展前景”.

《控制不等式基础》一书的出版极大地推动我国受控理论研究的发展.截至目前，我国学者在国内外已发表了 300 多篇有关受控理论与解析不等式方面的研究论文，绝大多数是 2003 年后发表的，其中近百篇刊于 SCI 期刊.已形成了一支在国际上具有一定影响的研究队伍，其中包括王挽澜、续铁权、石焕南、文家金、张小时、褚玉明、关开中、吴善和、杨镇杭、姜卫东、杨定华、席博彦、马统一、李大矛、夏卫锋、张静、何灯、许谦、王文、龙波涌、王东生、傅春茹等.2011 年，Arnold B C，Marshall A M 和 Olkin I 合作的《Inequalities: Theory of Majorization and Its Application》（第二版）[3]引用了不少国内学者的论文.

2012 年，石焕南的《受控理论与解析不等式》[4]一书由哈尔滨工业大学出版社出版，该书介绍受控理论的新推广及受控理论在解析不等式（包括对称函数不等式、序列不等式、积分不等式、平均值不等式等）方面的应用，并附有 400 多篇参考文献.该书出版后的 5 年间，书中所涉及的几乎所有问题都有了后续的研究成果.

2017 年，受刘培杰数学工作室的举荐，得国家出版基金的赞助，石焕南的《Schur 凸函数与不等式》[5]一书由

收稿日期：2017-07-26

作者简介：石焕南，男，湖南祁东人，北京联合大学师范学院教授.

哈尔滨工业大学出版社出版,与《受控理论与解析不等式》比较,该书的参考文献新增了近 160 余篇,还新增了"Schur 凸函数与几何不等式"等章节.

Schur-凸函数是受控理论的核心概念,本文回顾自 2003 年始,15 年间国内 Schur-凸函数研究的进展,着重介绍国内学者应用 Schur 凸函数理论于解析不等式研究所取得的成绩,并对今后的研究提出几点建议.

1 Schur-凸函数及其推广

在本文中,$\mathbf{R}^n$,$\mathbf{R}^n_+$ 和 $\mathbf{R}^n_{++}$ 分别表示 n 维实数集,n 维非负数集和 n 维正实数集,并记 $\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^1_+=\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}^1_{++}=\mathbf{R}_{++}$.

定义 1[1,2]　对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,将 $\boldsymbol{x}$ 的分量排成递减的次序号,记作 $x_{[1]}\geqslant x_2\geqslant x_{[n]}$.设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 满足

(i) $\sum\limits_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}$, $k=1,2,\cdots,n-1$, (ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$,

则称 x 被 y 所控制,记作 $\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}$.

$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$ 表示 $x_i\leqslant y_i$, $i=1,\cdots,n$.

定义 2[1-2]　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$,若在 Ω 上 $\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$,则称 φ 为 Ω 上的 Schur 凸函数(简称 S-凸函数);若 $-\varphi$ 是 Ω 上的 S-凸函数,则称 φ 为 Ω 上的 S-凹函数.

若在 Ω 上 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$,则称 φ 为 Ω 上的增函数;若 $-\varphi$ 是 Ω 上的增函数,则称 φ 为 Ω 上的减函数.

定理 1[1-2]　(Schur-凸函数判定定理)设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有内点的对称凸集,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$ 在 Ω 上连续,在 Ω 的内部 Ω^0 可微,则在 Ω 上 S-凸(S-凹)的充要条件是 φ 在 Ω 上对称且 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega^0$,有

$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\geqslant 0(\leqslant 0).$$

关于 Schur-凸函数的推广,国内学者做了不少开拓性的工作,并得到国外学者的认可与应用.2003 年,张小明首先提出并建立了 Schur 几何凸函数的定义及判定定理.

定义 3[6-7]　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n_{++}$,$f:\Omega\to\mathbf{R}_+$,对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\Omega$,若

$$\ln\boldsymbol{x}:=(\ln\boldsymbol{x}_1,\cdots,\ln\boldsymbol{x}_n)\prec(\ln y_1,\cdots,\ln y_n)=:\ln\boldsymbol{y},$$

有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{y})$,则称 f 为 Ω 上的 S-几何凸函数.若 $\ln\boldsymbol{x}\prec\ln\boldsymbol{y}$ 有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})$,则称 f 为 Ω 上的 S-几何凹函数.

定理 2[6,7]　(Schur-几何凸函数判定定理)设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n_{++}$ 是有内点的对称凸集,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$ 在 Ω 上连续,在 Ω 的内部 Ω^0 可微,则在 Ω 上 S-几何凸(S-凹)的充要条件是 φ 在 Ω 上对称且 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega^0$,有

$$(\ln x_1-\ln x_2)\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\geqslant 0(0\leqslant 0).$$

张小明将其对几何凸函数的研究成果写入其专著[6]和[7].

2008 年,褚玉明等首先提出并建立了 Schur 调和凸函数的定义及判定定理.

定义 4[8]　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n_+$,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}_+$.$\forall\,\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\Omega$,若 $(1/x_1,\cdots,1/x_n)\prec(1/y_1,\cdots 1/y_n)\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$,则称 φ 为 Ω 上的 Schur 调和凸函数;若 $-\varphi$ 是 Ω 上的 S-调和凸函数,则称 φ 为 Ω 上的 S-调和凹函数.

定理 3[8]　(Schur-调和凸函数判定定理)设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有内点的对称调和凸集,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}_+$ 于 Ω 上连续,在 Ω 的内部 Ω^0 一阶可微.若 φ 在 Ω 上对称,且对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega^0$,有

$$(x_1-x_2)\left(x_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\geqslant 0(\leqslant 0),$$

则 φ 是 Ω 上 S-调和凸(凹)函数.

作为 Schur 凸函数,Schur 几何凸函数,Schur 调和凸函数等概念的统一推广,2010 年杨镇杭定义了 Schur f 凸函数及 Schur 幂凸函数,并建立了相应的判定定理.

定义 5[9] 设 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{m-1}}{m},m\neq 0;\\ \ln x,m=0.\end{cases}$$

对于任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$，若 $f(\boldsymbol{x})\prec f(\boldsymbol{y})$，有 $\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$，则称 $\phi:\Omega\subset\mathbf{R}_+^n\to\mathbf{R}$ 是 Ω 上的 Schur m-幂凸函数.若 $-\phi$ 是 Schur m-幂凸函数，则称 ϕ 是 Ω 上的 Schur m-幂凹函数.

在定义 5 中，若分别置 $f(x)$ 为 x，$\ln x$ 和 $\dfrac{1}{x}$，则定义 5 就化为 Schur-凸，Schur-几何凸和 Schur-调和凸函数的定义.

定理 4[9] （Schur 幂凸函数的判定定理）设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有内点的对称凸集，$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$ 在 Ω 上连续，在 Ω 的内部 Ω^0 可微，则在 Ω 上 Schur m-幂凸（Schur m-幂凹）的充要条件是 φ 在 Ω 上对称且 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega^0$，有

$$\frac{x_1^m-x_2^m}{m}\left(x_1^{1-m}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{x_2^{1-m}\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\geqslant 0(\leqslant 0).$$

2009 年，杨定华[10]用公理化的方法，提出了抽象平均、抽象凸函数和抽象受控等概念，它们分别是平均、凸函数和受控等概念的相应推广.通过逻辑演绎，建立了抽象受控不等式的基本定理.

2014 年，在上述工作的基础上，杨定华[11]考虑范畴论的思想和方法：通过考察对象之间的态射反映对象本身的性质在抽象平均的基础平台上，基于映射的观点，首先提出抽象平均、抽象凸函数、抽象控制和抽象受控不等式等同构映射的概念，建立了抽象凸函数同构映射的基本定理.

2 Schur-凸函数性质的移植

将 Schur-凸函数的定义推广到 Schur-几何凸，Schur-调和凸函和 Schur-幂凸函数后，自然可进一步考虑 Schur-凸函数的某些性质可否向 Schur-几何凸，Schur-调和凸函和 Schur-幂凸函数移植？石焕南和张静在这方面做了下述工作.

定义 6[12] 设区间 $I\subset\mathbf{R}_+$，函数 $\varphi:I\to\mathbf{R}_+$ 连续.

(i)函数 φ 说是 I 上的 GA 凸（凹）函数，若对于 $x,y\in I$，有

$$\varphi(\sqrt{xy})\leqslant(\geqslant)\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2},$$

(ii)函数 φ 与是 I 上的 HA 凸函数，若对于 $x,y\in I$，有

$$\varphi\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\leqslant(\geqslant)\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.$$

设 $\pi=(\pi(1),\cdots,\pi(n))$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的任意置换，关于 Schur-凸函数有如下判定定理：

定理 5[1] 设 $A\subset\mathbf{R}^k$ 是一个对称凸集，φ 是 A 上的 S-凸函数，具有性质：对每一个固定的 $x_2,\cdots,x_k$，$\varphi(z,x_2,\cdots,x_k)$ 关于 z 在 $\{z:(z,x_2,\cdots,x_k)\in A\}$ 上凸，则对于任何 $n>k$，$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{\pi}\varphi(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)})$ 在 B 上 S-凸，其中

$B=\{(x_1,\cdots,x_n):(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)})\in A$，对于所有的排列 $\pi\}$，

继而

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$$

在 B 上 S-凸.

2013 年，石焕南和张静[13]将定理 5 移植到 Schur-几何凸和 Schur-调和凸的情形.

定理 6[13] 设 $A\subset\mathbf{R}^k$ 是一个对称凸集，φ 是 A 上的 S-几何凸函数，具有性质：对每一个固定的 $x_2,\cdots,x_k$，$\varphi(z,x_2,\cdots,x_k)$ 关于 z 在 $\{z:(z,x_2,\cdots,x_k)\in A\}$ 上 GA 凸，则对于任何 $n>k$，

$$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\pi}\varphi(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)})$$

在 B 上 S-几何凸,其中

$$B=\{(x_1,\cdots,x_n):(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)})\in A,\text{对于所有的排列 }\pi\}.$$

继而

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$$

在 B 上 S-几何凸.

定理 7[13]　设 $A\subset\mathbf{R}^k$ 是一个对称凸集,φ 是 A 上的 S-调和凸函数,具有性质:对第一个固定的 $x_2,\cdots,x_k$,$\varphi(z,x_2,\cdots,x_k)$ 关于 z 在 $\{z:(z,x_2,\cdots,x_k)\in A\}$ 上 HA 凸,则对于任何 $n>k$,

$$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\pi}\varphi(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)})$$

在 B 上 S-调和凸,其中

$$B=\{(x_1,\cdots,x_n):(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(k)})\in A,\text{对于所有的排列 }\pi\}.$$

继而

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x})=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k<n}\varphi(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$$

在 B 上 S-调和凸.

设区间 $I\subset\mathbf{R}$,$\varphi:I\to\mathbf{R}_+$ 是一个对数凸函数.定义对称函数

$$F_k(\boldsymbol{x})=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\prod_{j=1}^{k}f(x_{i_j}),k=1,\cdots,n.$$

王淑红等[14]利用 S-凸函数、S-几何凸函数和 S-调和凸函数的判定定理证得:

定理 8[14]　设 $I\subset\mathbf{R}$ 是具有非空内部的对称凸集,函数 $f:I\to\mathbf{R}_{++}$ 在 I 上连续,在 I 的内部可微且对数凸,则 $F_k(\boldsymbol{x})$ 在 I^n 上 S-凸.若 f 还是递增函数,则 $F_k(\boldsymbol{x})$ 在 I^n 上 S-几何凸且 S-调和凸.

张静和石焕南[15]利用定理 5,定理 6 和定理 7 简洁地证明了定理 8.

2014 年,对于 $F_k(\boldsymbol{x})$ 的对偶函数

$$F_k^*(\boldsymbol{x})=\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{j=1}^{k}f(x_{i_j}),\ k=1,\cdots,n,$$

石焕南和张静[16]利用定理 5,定理 6 和定理 7 证得:

定理 9[16]　设 $I\subset\mathbf{R}$ 是具有非空内部的对称凸集,函数 $f:I\to\mathbf{R}_{++}$ 在 I 上连续,在 I 的内部可微且对数凸,则 $F_k^*(\boldsymbol{x})$ 在 I^n 上 S-凸.若 f 还是递增函数,则 $F_k^*(\boldsymbol{x})$ 在 I^n 上 S-几何凸且 S-调和凸.

关于复合函数的 Schur-凸性,有如下结论:

定理 10[1]　设区间 $[a,b]\subset\mathbf{R}$,$\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,$f:[a,b]\to\mathbf{R}$,$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\varphi(f(x_1),\cdots,f(x_n)):[a,b]^n\to\mathbf{R}$.

(a)若 φ 增且 S-凸,f 凸,则 ψ S-凸.

(b)若 φ 增且 S-凹,f 凹,则 ψ S-凹.

(c)若 φ 减且 S-凸,f 凹,则 ψ S-凸.

(d)若 φ 增且 S-凸,f 增且凸,则 ψ 增且 S-凸.

(e)若 φ 减且 S-凸,f 减且凹,则 ψ 增且 S-凸.

(f)若 φ 增且 S-凸,f 减且凸,则 ψ 减且 S-凸.

(g)若 φ 减且 S-凸,f 增且凹,则 ψ 减且 S-凸.

(h)若 φ 减且 S-凹,f 减且凹,则 ψ 增且 S-凹.

2015 年,石焕南和张静[17]将定理 10 移植到 Schur-几何凸的情形.

定理 11[17]　设区间 $[a,b]\subset\mathbf{R}$,$\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,$f:[a,b]\to\mathbf{R}$,$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\varphi(f(x_1),\cdots,f(x_n)):[a,b]^n\to\mathbf{R}$.

(a)若 φ 增且 S-几何凸,f 几何凸,则 ψ S-几何凸.

(b)若 φ 增且 S-几何凹,f 几何凹,则 ψ S-几何凹.

(c)若 φ 减且 S-几何凸,f 几何凹,则 ψ S-几何凸.

(d)若 φ 增且 S-几何凸,f 增且几何凸,则 ψ 增且 S-几何凸.

(e)若 φ 减且 S -几何凸，f 减且几何凹，则 ψ 增且 S -几何凸.

(f)若 φ 增且 S -几何凸，f 减且几何凸，则 ψ 减且 S -几何凸.

(g)若 φ 减且 S -几何凸，f 增且几何凹，则 ψ 减且 S -几何凸.

(h)若 φ 减且 S -几何凹，f 减且几何凹，则 ψ 增且 S -几何凹.

2017 年，石焕南和张静[18]又将定理 10 移植到 Schur-调和凸的情形.

定理 12[18] 设区间 $[a,b]\subset\mathbf{R}$，$\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$f:[a,b]\to\mathbf{R}$，$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\varphi(f(x_1),\cdots,f(x_n)):[a,b]^n\to\mathbf{R}$.

(a)若 φ 增且 S -调和凸，f 调和凸，则 ψ S -调和凸.

(b)若 φ 增且 S -调和凹，f 调和凹，则 ψ S -调和凹.

(c)若 φ 减且 S -调和凸，f 调和凹，则 ψ S -调和凸.

(d)若 φ 增且 S -调和凸，f 增且调和凸，则 ψ 增且 S -调和凸.

(e)若 φ 减且 S -调和凸，f 减且调和凹，则 ψ 增且 S -调和凸.

(f)若 φ 增且 S -调和凸，f 减且调和凸，则 ψ 减且 S -调和凸.

(g)若 φ 减且 S -调和凸，f 增且调和凹，则 ψ 减且 S -调和凸.

(h)若 φ 减且 S -调和凹，f 减且调和凹，则 ψ 增且 S -调和凹.

3 Schur-凸函数与解析不等式

近些年国内学者应用 Schur-凸函理论研究解析不等式的成果颇丰，本文不可能一一赘述，仅在本节介绍某些笔者感觉比较新颖或比较漂亮的结果.

3.1 Schur-凸函数与多元对称函数不等式

一个对称凸集上的 S -函数必是对称函数，这意味着受控理论最适宜处理对称函数不等式问题，因此研究多元对称函数的 Schur-凸性一直是受控理论研究的热点.近几年，国内学者得到一些不错的结果，这里介绍数例.

对于下述完全对称函数的复合函数

$$F_n(\boldsymbol{x},r)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=r}\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)^{i_1}\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)^{i_n}.$$

2014 年，孙明保等[19]考察了它的 S -凸性、S -几何凸性和 S -调和凸性，分别利用这 3 种凸性的判定定理证得如下 3 个定理.

定理 13[19] 对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1)^n\cup(1,+\infty)^n$ 和 $r\in\mathbf{N}$，

(i)$F_n(\boldsymbol{x},r)$在$[0,1)^n$ 上递增且 Schur-凸；

(ii)若 r 是偶数（奇数），则 $F_n(\boldsymbol{x},r)$在$(1+\infty)^n$ 上递增且 Schur-凸（递增且 Schur-凹）.

定理 14[19] 对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1)^n\cup(1,+\infty)^n$ 和 $r\in\mathbf{N}$，

(i)$F_n(\boldsymbol{x},r)$在$[0,1)^n$ 上 Schur-几何凸；

(ii)若 r 是偶数（奇数），则 $F_n(\boldsymbol{x},r)$在$(1+\infty)^n$ 上 Schur-几何凸（Schur-几何凹）.

定理 15[19] 对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1)^n\cup(1,+\infty)^n$ 和 $r\in\mathbf{N}$，

(i)$F(\boldsymbol{x},r)$在$[0,1)^n$ 上 Schur-调和凸；

(ii)若 r 是偶数（奇数），则 $F_n(\boldsymbol{x},r)$在$(1,+\infty)^n$ 上调和凸（调和凹）.

注 1 石焕南等[20]分别利用 S -凸、S -几何凸和 S -调和凸的有关性质给出上述 3 个定理的简单证明.

关开中[21]将 Hamy 对称函数推广为

$$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}f\left(\prod_{j=1}^k x_{i_j}^{\frac{1}{k}}\right),k=1,\cdots,n.$$

2011 年，关开中和关汝柯[22]研究了当 f 为 MN 凸函数时$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$的 S -凸性，得到如下结果.

定理16[22]　设$I\subset\mathbf{R}_{++}$,$f:I\to\mathbf{R}_{++}$连续,则:(a)若f在I上递减且AA凸,则$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上S-凸;(b)若$f$在$I$上递增且AA凹,则$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上S-凹.

定理17[22]　设$I\subset\mathbf{R}_{++}$,$f:I\to\mathbf{R}_{++}$连续,则:(a)若f在I上递减且GA凸,则$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上S-几何凸;(b)若$f$在$I$上递增且GA凹,则$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上S-几何凹.

定理18[22]　设$I\subset\mathbf{R}_{++}$,$f:I\to\mathbf{R}_{++}$连续,则:(a)若f在I上递减且HA凸,则$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上S-调和凸;(b)若$f$在$I$上递增且HA凹,则$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上S-调和凹.

2014年,王文和杨世国[23]研究了$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$的S-幂凸性,得到如下结果.

定理19　设$I\subset\mathbf{R}_{+}$,$f:I\to\mathbf{R}_{+}$在I内有二阶连续的偏导数.若f在I上是单调递增的几何凸函数,则

(a)对于$m\leqslant 0$,$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上$m$阶S-幂凸;

(b)当$r=2$,$n=2$时,对于$m>0$,$\sum_n^k(f(\boldsymbol{x}))$在$I^n$上$m$阶S-幂凹.

注2　定理19是经张鑑等[24]修正后的结果,且张鑑等给出结论(a)的一个简单证明.

王文和杨世国[25]定义了如下对称函数:

$$F_{n,k}(\boldsymbol{x},r)=\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}f\Big(\sum_{j=1}^{k}x_{i_j}^{r}\Big)^{\frac{1}{r}},k=1,\cdots,n,$$

并利用S-幂凸函数的判定定理证得下述如果.

定理20[25]　设$\Omega\subset\mathbf{R}_{++}$是一个具有非空内点的对称凸集,$f:\Omega\to\mathbf{R}_{++}$在$\Omega$上连续,在$\Omega^0$可微.若$f$是递增的几何凸函数,则对于$m\leqslant 0$,$r>0$,$k=1,2\cdots,n$,$F_{n,k}(\boldsymbol{x},r)$是$\Omega$上的S-幂凸函数.

注3　石焕南[5]利用S-几何凸函数和S-幂凸函数的性质给出定理20的一个简单证明.

3.2　Schur凸函数与平均值不等式

设$(r,s)\in\mathbf{R}^2$,$(x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}$.Stolarsky平均定义如下:

$$E(r,s;x,y)\begin{cases}\left(\dfrac{s}{r}\cdot\dfrac{y^r-x^r}{y^s-x^s}\right)^{1/(r-s)}, & rs(r-s)(x-y)\neq 0;\\ \left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{y^r-x^r}{\ln y-\ln x}\right)^{1/r}, & r(x-y)\neq 0,s=0;\\ \dfrac{1}{e^{1/r}}\left(\dfrac{x^{x^r}}{y^{y^r}}\right)^{1/(x^r-y^r)}, & r(x-y)\neq 0,r=s;\\ \sqrt{xy}, & r=s=0,x\neq y;\\ x, & x=y.\end{cases}$$

2012年,杨镇杭[26]考察了$E(r,s;x,y)$的S-幂凸性,得到:

定理21[26]　对于固定的$(r,s)\in\mathbf{R}^2$:

(a)若$m>0$,则$E(r,s;x,y)$关于(x,y)在$\mathbf{R}^2_{++}$上m阶S-幂凸(S-幂凹)当且仅当$r+s\geqslant(\leqslant)3m$且$\min\{r,s\}\geqslant m(\leqslant m)$;(b)若$m<0$,则$E(r,s;x,y)$关于$(x,y)$在$\mathbf{R}^2_{++}$上$m$阶S-幂凸(S-幂凹)当且仅当$r+s\geqslant(\leqslant)3m$且$\max\{r,s\}\geqslant m(\leqslant m)$;(c)若$m=0$.则$E(r,s;x,y)$关于$(x,y)$在$\mathbf{R}^2_{++}$上S-幂凸(S-幂凹)当且仅当$r+s\geqslant 0(\leqslant 0)$.

设$(r,s)\in\mathbf{R}^2$,$(x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}$.Gini平均定义如下:

$$G(r,s;x,y)\begin{cases}(\frac{x^s+y^s}{x^y+y^r})^{1/(s-r)},\ r\neq s,\\ \exp(\frac{x^s\ln x+y^s\ln y}{x^r+y^r}),r=s.\end{cases}$$

2013 年,杨镇杭[9]考察了 $G(r,s;x,y)$ 的 S-幂凸性,得到:

定理 22[9] 对于固定的 $(r,s)\in\mathbf{R}^2$:

(a)若 $m>0$,则 $G(r,s;x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 m 阶 S-幂凸(S-幂凹)当且仅当 $r+s\geqslant(\leqslant)m$ 且 $\min\{r,s\}\geqslant0(\leqslant0)$;(b)若 $m<0$,则 $G(r,s;x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 m 阶 S-幂凸(S-幂凹)当且仅当 $r+s\geqslant(\leqslant)m$ 且 $\max\{r,s\}\geqslant0(\leqslant0)$;(c)若 $m=0$,则 $G(r,s;x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 S-幂凸(S-幂凹)当且仅当 $r+s\geqslant0(\leqslant0)$.

广义 Heron 平均定义如下:

$$H_{p,\omega}(x,y)=\begin{cases}[\frac{x^p+\omega(xy)^{p/2}+y^p}{\omega+2}]^{\frac{1}{p}},p\neq0,\\ \sqrt{xy},p=0.\end{cases}$$

其中 $\omega\geqslant0$.

杨镇杭[27]将广义 Heron 平均 $H_{\omega,p}(x,y)$ 参数 ω 的取值范围 $\omega\geqslant0$ 扩展为 $\omega>-2$,并称此时的广义 Heron 平均为 Daróczy 平均,得到如下结果.

定理 23[27] 对于固定的 $p\in\mathbf{R}$,$m>0$ 和 $\omega>-2$.$H_{\omega,p}(x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 m 阶 S-幂凸(S-幂凹)当且仅当 $(\omega,p)\in\Omega_1$($(\omega,p)\in\Omega_2$),其中

$$\Omega_1=\{-2<\omega\leqslant0,p\geqslant\frac{(\omega+2)m}{2}\}\cup\{\omega>0,p\geqslant\max(\frac{(\omega+2)m}{2},2m)\}$$

$$\Omega_2=\{-2<\omega<0,p>0\}\cup\{\omega\geqslant0,p\leqslant\min(\frac{(\omega+2)m}{2},2m)\}$$

定理 24[27] 对于固定的 $p\in\mathbf{R}$,$m<0$ 和 $\omega>-2$,$H_{\omega,p}(x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 m 阶 S-幂凸(S-幂凹)当且仅当 $(\omega,p)\in E_1$($(\omega,p)\in E_2$),其中

$$E_1=\{-2<\omega<0,p>0\}\cup\{\omega\geqslant0,p\geqslant\max(\frac{\omega+2}{2}m,2m)\}$$

$$E_2=\{-2<\omega\leqslant0,p\leqslant\frac{\omega+2}{2}m\}\cup\{\omega>0,p\leqslant\min(\frac{\omega+2}{2}m,2m)\}$$

定理 25[27] 对于固定的 $p\in\mathbf{R}$,$m=0$ 和 $\omega>-2$,$H_{\omega,p}(x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 m 阶 S-幂凸(S-幂凹)当且仅当 $p\geqslant(\leqslant)0$.

2014 年,邓勇平等[28]将广义 Heron 平均 $H_{\omega,p}(x,y)$ 和 Gini 平均 $G(r,s;x,y)$ 统一推广为如下含有 3 个参数的广义 Gini-Heron 平均并考察了它的 S-几何凸性.

$$H_{p,\omega}(x,y)=\begin{cases}[\frac{x^p+\omega(xy)^{p/2}+y^p}{x^q+\omega(xy)^{q/2}+y^q}]^{\frac{1}{p-q}},\ p\neq q,\\ \exp\{\frac{x^p\ln x+\omega(xy)^{p/2}\ln xy+y^p\ln y}{x^p+\omega(xy)^{p/2}+y^p}\},p=q.\end{cases}$$

其中 $(p,q)\in\mathbf{R}^2$,$(x,y)\in\mathbf{R}^2_{++}$.

定理 26[28] 对于固定的 $(p,q,\omega)\in\mathbf{R}^3$:

(a)若 $p+q\geqslant0$ 且 $\omega\geqslant0$,则 $H_{p,\omega}(x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 S-几何凸;

(b)若 $p+q\leqslant0$ 且 $\omega\geqslant0$,则 $H_{p,\omega}(x,y)$ 关于 (x,y) 在 $\mathbf{R}^2_{++}$ 上 S-几何凹.

吴裕东等[29]还考察了 Gnan 平均和它的对偶式的 S-凸性和 S-几何凸性.

问题 1 Gnan 平均及其对偶式的调和凸性和 S-幂凸性如何?

2009 年，顾春，石焕南[30]证得如下结果：

定理 27[30]　设 $x\in\mathbf{R}_{++}^{2}$，则 n 元 Lehme 平均

$$L_p(\boldsymbol{x})=L_p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{p-1}},$$

当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，在 $\mathbf{R}_{++}^{2}$ 上 S -凸；而当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时，在 $\mathbf{R}_{++}^{2}$ 上 S -凹.并猜想：当 $p\geqslant 2$ 时，在 $\mathbf{R}_{++}^{2}$ 上 S -凸；而当 $p\leqslant 0$ 时，在 $\mathbf{R}_{++}^{2}$ 上 S -凹.

2016 年，傅春茹等[31]指出此猜想不成立，得到如下结果.

定理 28[31]　(a)当 $p\geqslant 2$ 时，对任意的 $a>0$，$L_p(\boldsymbol{x})$在$[\frac{(p-2)a}{p},a]^n$ 上 Schur-凸，

(b)当 $p<0$ 时，对任意的 $a>0$，$L_p(\boldsymbol{x})$在$[a,\frac{(p-2)a}{p}]^n$ 上 Schur-凹.

定理 29[31]　(a)当 $p<\frac{1}{2}$ 且 $p\neq 0$ 时，对任意的 $a>0$，$L_p(\boldsymbol{x})$在$[a,(\frac{p-1}{p})^2a]^n$ 上 S -几何凹，

(b)当 $p>\frac{1}{2}$时，对任意的 $a>0$，$L_p(\boldsymbol{x})$在$[(\frac{p-1}{p})^2a,a]^n$ 上 S -几何凸.

(c)当 $p=0$ 时，$L_p(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{++}^{n}$ 上 S -几何凹.

定理 30　(a)当 $0<p\leqslant 1$ 时，$L_p(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{++}^{n}$ 上 S -调和凸，当$-1\leqslant p\leqslant 0$ 时，$L_p(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{++}^{n}$ 上 S -调和凹.

(b)当 $p>1$ 时，对任意的 $a>0$，$L_p(\boldsymbol{x})$在$[\frac{p-1}{p+1}a,a]^n$ 上 S -调和凸，

(c)当 $p<-1$ 时，对任意的 $a>0$，$L_p(\boldsymbol{x})$在$[a,\frac{p-1}{p+1}a]^n$ 上 S -调和凹.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}_{+}^{n}$，$p,q\geqslant 0$，$p+q\neq 0$.Bonferroni 平均定义如下：

$$B^{p,q}(\boldsymbol{x})=(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}x_i^px_j^q)^{\frac{1}{p+q}}.$$

Bonferroni 平均是二元 Muirhead 平均的推广.最近王东生，石焕南[32]研究了 Bonferroni 平均的 S -凸性，S -几何凸性和 S -调和凸性，得到如下结果.

定理 31[32]　对于 $n\geqslant 3$ 和固定的$(p,q)\in\mathbf{R}^2$，

(a)若 $0\leqslant q\leqslant p\leqslant 1$ 且 $p-q\leqslant\sqrt{p+q}$，$p+q\neq 0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -凹；

(b)若 $q\leqslant p\leqslant 0$ 且 $p+q\neq 0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -凹；

(c)若 $p\geqslant 1,q\leqslant 0$ 且 $p+q\geqslant 0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -凸；

(d)若 $p\geqslant 1,q\leqslant 0$ 且 $p+q\geqslant 0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -凹.

定理 32[32]　对于 $n\geqslant 3$ 和固定的$(p,q)\in\mathbf{R}^2$，

(a)若 $p+q>0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -几何凸；

(b)若 $p+q<0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -几何凹.

定理 33[32]　对于 $n\geqslant 3$ 和固定的$(p,q)\in\mathbf{R}^2$，

(a)若 $p\geqslant q\geqslant 0$ 且 $p+q\neq 0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -调和凸；

(b)若 $0\geqslant p\geqslant q\geqslant -1$ 且 $p+q\neq 0$，$(p-q)^2+p+q\leqslant 0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -调和凸；

(c)若 $p\geqslant 0,q\leqslant -1$ 且 $p+q>0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -调和凸；

(d)若 $p\geqslant 0,q\leqslant -1$ 且 $p+q<0$，则 $B^{p,q}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}_{+}^{n}$ 上 S -调和凹.

3.3　Schur-函数与特殊函数不等式

对于 $x\in\mathbf{C}$ 且 $\mathrm{Re}(x)>0$，定义

$$\Gamma_k(x)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^k}{k}}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

和

$$\zeta_k(x)=\frac{1}{\Gamma_k(x)}\int_0^{\infty}\frac{t^{x-k}}{\mathrm{e}^{t}-1}\mathrm{d}t,\ x>k.$$

$\Gamma_k(x)$ 和 $\zeta_k(x)$ 分别是伽马函数 $\Gamma(x)$ 和黎曼 Zeta 函数 $\zeta(x)$ 的推广.张静和石焕南[33] 利用受控理论得如下结果:

定理 34[33]

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma_k(1+\alpha_i)}{\Gamma_k(\beta+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)}\leqslant\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma_k(1+\alpha_i x)}{\Gamma_k(\beta+(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)x)}\leqslant\frac{1}{\Gamma_k(\beta)}$$

其中 $x\in[0,1]$,$\beta\geqslant 1$,$\alpha_i>0$,$n\in\mathbf{N}$.

定理 35[33]

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\zeta_k(k+1+\alpha_i)\Gamma_k(k+1+\alpha_i)}{\zeta_k(k+1+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\Gamma_k(\beta+k+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)}\leqslant$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\zeta_k(k+1+\alpha_i)\Gamma_k(k+1+\alpha_i)x}{\zeta_k(k+1+(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)x)\Gamma_k(\beta+k+(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)x)}\leqslant\frac{(\frac{\pi^2}{6})^n}{\zeta_k(\beta+k)\Gamma_k(\beta+k)}$$

其中 $x\in[0,1]$,$\beta\geqslant 1$,$\alpha_i>0$,$n\in\mathbf{N}$.

卡塔兰数(Catalan numbers)C_n 是组合数学中一类重要的自然数数列,其计算公式可用伽马函数表为

$$C_n=\frac{4^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+2)}.$$

祁锋等[34]给出一个推广形式

$$C(a,b;x)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}(\frac{b}{a})^x\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)},$$

其中 $a,b>0$,$x\geqslant 0$,称$(a,b;x)$为卡塔兰－祁函数(或广义卡塔兰函数).

祁锋等研究了此函数的 S-凸性,得到如下结果:

定理 36[35] 对于 $a,b>0$,$x\geqslant 0$,令 $F_x(a,b)=|\ln C(a,b,x)|$,则对于 $x\geqslant 0$,$F_x(a,b)$关于(a,b)在 $\mathbf{R}_{++}^2$ 上 S-凸.

4 几点建议

关于 Schur-凸函数研究,笔者提出如下几点建议:

1)在受控理论的研究中,有两项工作是重要且基础的,一是发现和建立向量间的控制关系,二是发现和证明各种 Schur 凸函数.利用 Schur 凸函数判定定理是判定 Schur 凸函数的主要方法,但注意有时利用 Schur 函数的性质判定会简单些.

2)进一步完善我们所创立的 Schur-几何凸、Schur-调和凸、Schur-幂凸理论,例如移植 Schur-凸函数性质,还有许多工作可做.凸函数的各种推广层山不穷,除了已有的几种推广,Schur 凸函数是不是还可以做一些推广?

3)利用受控理论证明不等式主要适用于对称函数不等式,这是它的局限性,但对称函数是非常广泛且十分重要的函数,所以受控理论大有用武之地,有大量课题有待我们挖掘.

4)Arnold,Marshall 和 Olkin 合作出版的《Inequalities:Theory of Majorization and Its Application》(第二版)中的应用部分涉及组合分析、几何不等式、矩阵理论、数值分析、概率统计等领域.目前国内受控理论研究者主要利用受控理论研究解析不等式和矩阵不等式,努力开拓在其他领域的应用,可能别有洞天.

参考文献:

[1] MARSHALL A W,OLKIN I.Inequalities:theory of majorization and its application[M].New York:Academies Press,1979.

[2] 王伯英.挂制不等式甚础[M].北京:北京师范大学出版社,1990.

[3] MARSHALL A M,OLKIN I,ARNOLD B C.Inequalities:theory of majorization and its application [M].2nd ed.Springer New York Dordrecht Heidelberg London,2011.

[4] 石焕南.受控理论与解析不等式,哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.

[5] 石焕南.Schur-凸函数与不等式,哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.

[6] 张小明.Schur-几何凸函数[M].合肥:安徽大学出版社,2004.

[7] 张小明.褚玉明.解析不等式新论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.

[8] CHU Yuming ,LÜ Yupei.The Schur harmonic convexity of the Hamy symmetric function and its applications[J].Journal of Inequalities and Applications,2009,Article ID 838529,10 pages,doi:10.1155/2009/898529.

[9] YANG Zhenhang.Schur power convexity of Gini means [J].Bull Korean Math Soc,2013,50(2):485—498.

[10] 杨定华.抽象控制不等式的理论基础[J].中国科学 A 辑:数学,2009,39(7):873-891.

[11] 杨定华.抽象受控不等式的同构映射[J].数学进展,2014,43(5):741-760.

[12] ANDERSON G D,VAMANAMURTHY M K,VUORINEN M.Generalized convexity and inequalities[J].J MathAnal Appl,2007,335(2):1294-1308.

[13] SHI Huannan,ZHANG Jing.Some new judgment theorems of Schur geometric and Schur harmonic convexities for a class of symmetric functions[J].J Inequal Apple,2013,527 doi:10.1186/1029-242X-2013-527.

[14] 王淑红,张天宇,华志强.一类对称函数的 Schur-几何凸性及 Schur-调和凸性[J].内蒙古民族大学学报(自然科学版),2011,26(4):387-390.

[15] 张静,石焕南.关于一类对称函数的 Schur 凸性[J].数学的实践与认识,2013,43(19):292-296.

[16] SHI Huannan,ZHANG Jing.Schur-convexity,Schur-geometric and harmonic convexities of dual form of a class symmetric functions[J].J Math Inequal,2014,8(2):349-358.

[17] SHI Huannan,ZHANG Jing.Compositions involving Schur geometrically convex functions[J].J Inequal Appl,2015:320.

[18] SHI Huannan,ZHANG Jing.Compositions involving Schur harmonically convex functions[J].Journal of Computational Analysis and Applications,2017,22(5):907-922.

[19] SUN M B,CHEN N B,LI S H.Some properties of a class of symmetric functions and its applications [J].Math Nachr,2014,287(13):1530-1544.

[20] SHI Huannan,ZHANG Jing,MA Qinua.Schur-convexity,Schur-geometric and Schur-harmonic convexity for a composite function of complete symmetric function[J].Springer Plus,2016,5:296.

[21] GUAN Kaizhong.A class of symmetric functions for multiplicatively convex function[J].Math Inequal Appl,2007,10(4):745-753.

[22] GUAN Kaizhong.GUAN Ruke.Some properties of a generalized Hamy symmetric function and its applications[J].J Math Anal Appl,2011,376:494-505.

[23] 王文,杨世国.一类对称函数的 m-指数凸性[J].系统科学与数学,2014:34(3):367-375.

[24] 张鑑,顾春,石焕南.一类对称函数 Schur-指数凸性的简单证明[J].系统科学与数学,2016,136(10):1779-1782.

[25] WANG Wen,YANG Shiguo,Schur m-power convexity of a class of multiplicatively convex functions and applications[J].Abstract and Applied Analysis,2014,Article ID 258108.12 pages http://dx.doi.org/10.1155/2014/258108.

[26] YANG Zhenhang.Schur power convexity of Stolarsky means[J].Publ Math Debrecen,2012,80(1-2):43-66.

[27] YANG Zhenhang.Schur power convexity of the Daróczy means[J].Math Inequal Appl,2013:16(3):751-762.

[28] DENG Yongping.CHU Yuming.WU Shanhe,et al.Schur-geometric convexity of the generalized Gini-Heronian means involving three parameters[J].J Inequal Appl,2014:413.

[29] LOKESHA V,NAGARAJA K M,NAVEEN Kumar B,et al.Schur convexity of Gnan mean for two variables[J].NNTDM,2011,17(4):37-41.

[30] 顾春,石焕南.Lehme 平均的 Schur 凸性和 Schur 几何凸性[J].数学的实践与认识,2009,39(12):183-188.

[31] FU Chunru,WANG Dongsheng,SHI Huannan.Schur-convexity for Lehmer mean of n variables[J].J Nonlinear Sci Appl,2016,9:5510-5520.

[32] WANG Dongsheng,SHI Huannan.Schur convexity of Bonferroni ineans[J].Advanced Studies in Contemporary Mathematics.

[33] ZHANG Jing,SHI Huannan.Two double inequalities for k-gaunna and k-Rienlann zeta functions[J].J Inequal Appl,2014:191.

[34] QI F,SHI X T,LIU F F.An exponential representation for a function involving the gamma function and originating from the Catalan numbers[J/OL].ResearchGate Research,http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.1.1086.4486.

[35] QI F,SHI X T,MANSOUR M,et al.Schur-convexity of the catalan-Qi function[J/OL].http://www.researchgate.net/publication/281448338.

A Survey on the Study of Schur-Convex Function in China

SHI Huannan

(Teacher's College, Beijing Union University, Beijing, 100011, P. R. China)

Abstract: In this paper, we review the research progress of Schur convex function in China since 2003, focus on research results of domestic scholars on analytic inequalities using Schur-convex function theory, and put forward some suggestions for future research.

Key words: Schur-convex function; analytic inequalities; Schur geometrically convex function; Schur harmonically convex function; Schur power convex function