

# 核心素养渗透数学课程教学

李尚志

(北京航空航天大学 100083)

**内容提要** 本文从画五角星谈起,通过具体的数学教学案例,说明核心素养不是强加于课程之外的额外负担和无病呻吟,而应该渗透在具体数学内容的教学过程中,成为引导学生理解和应用数学知识的指路明灯和导航仪。

## 数学核心素养

《普通高中数学课程标准(2017)》对核心素养的阐述:

数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的。

其中所说的关键能力、思维品质都是潜力,学生在学习和工作中取得的成绩(包括考试成绩和工作业绩)都是潜力的实现。

人的大脑指挥四肢,诸葛亮指挥关羽张飞,核心素养好比大脑和诸葛亮,它的作用是指解决学习和工作中的问题。

如果核心素养是在教师原来的教学和学生的学习之外另外追加的新内容,甚至是取代“应试教育”的“素质教育”,就好比让诸葛亮代替关羽张飞,自己挥舞大刀或长矛上战场,必败无疑。

我把以上意见发表到微信群中与中学教师讨论,有人反驳说我这个“用核心素养指挥课堂而不是代替课堂”的说法是偷梁换柱,篡改了核心素养的本意。我特意查了《普通高中数学课程标准》中关于核心素养的论述,发现他只是指出了目标和方向,并没有具体规定每一节课的内容该怎么上。好比他给你派任务修房子,却并没有给你修好房子,当然也就没有梁没有柱,我也就无梁可偷,无柱可换。课标中的叙述至多算是画了一个图纸。甚至连图纸都没有画,只是提出一些要求,要具有什么功能,达到什么质量标准。“房子”谁来修?不能等制定课程标准的专家来修,需要你按照他的

要求自己修。修得好不好,除了按照他的要求来检验,更权威的检验是你使用的效果。住起来是否方便,是否舒服。如果房子垮了压死了人,该追究谁的责任?如果大家修的房子都达到他的要求却垮了,制定标准的专家有责任。如果别人的都没垮,你的垮了,就是你的责任了。也就是说:核心素养对不对,执行得好不好,不由专家说了算,而是由教书育人的效果来检验。

高中数学核心素养有六条。我们看他到底要求了什么:

### 一、数学创世纪

1. 数学抽象:舍去事物的一切物理属性,得到数学研究对象的思维过程。从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构,并且用数学符号或者数学术语予以表征。

2. 逻辑推理:从一些事实和命题出发,依据逻辑规则推出一个命题的思维过程。

这两条核心素养讲的是:数学从何而来,数学真理的标准怎样检验。

什么是抽象?抽象就是很多事物的共同点,很多不同现象的共同规律。核心素养第一条数学抽象讲的是数学是现实世界总结出来的共同规律。这是数学的根本起源。

第二条逻辑推理是由已经总结出来的规律推出新的规律。这是数学生长和发展的主要途径:从很少几条公理推出大量的定理。

打个比方:中国神话说人的起源是女娲造人,女娲造得太累了就不造了,让人自己繁殖,人生人。数学抽象是现实世界产生数学,相当于女娲造

人. 逻辑推理相当于人生人. 有一点差别是女娲死了就再也不造人了. 而造数学的女娲——现实世界却永远不死, 继续造下去. 不过, 现实中新造出来的数学不但要接受现实的检验, 还要接受逻辑推理来检验, 也就是用公理来检验. 反过来, 由公理经过逻辑推理得出的定理也必须拿到现实世界中去应用并接受检验. 不仅检验了定理, 也检验了公理和逻辑推理的正确性.

这两条核心素养说清楚了数学是从现实世界来, 并且自己成长壮大. 同时也就说清楚了数学不是神仙皇帝或者某个权威凭自己意愿随心所欲创造出来的. 这符合国际歌的歌词“从来就没有什么救世主, 也不靠神仙皇帝. 要创造人类的幸福, 全靠我们自己.”也符合老子说的“道法自然”, 而不是道法权威或道法皇帝. 这条核心素养唱的是: “从来就没有什么救世主, 也不靠神仙皇帝. 要主宰宇宙万物, 全靠客观规律.”因此, 老师讲解一个数学定理或算法的时候, 决不能说“听老师的就没错. 因为是某书上写了的, 所以就没错.”也不能说“听牛顿的”, “听高斯的”. 定理或算法之所以正确, 不是因为它是牛顿、高斯发明的, 而是要把牛顿或高斯的理由拿来证明它没错. 当我们学习牛顿高斯的论证过程的时候, 其实也是在审查牛顿高斯是否正确. 审查结束, 那就不是牛顿高斯的真理, 而是宇宙的真理. 哪怕牛顿高斯自己改变观点承认自己错了, 我们也不跟着他改变. 这正如足球场上的胜负是由进球决定的, 大家都看得懂. 马拉多纳之所以赢了, 不是因为他是马拉多纳, 而是因为他进了球. 反过来, 马拉多纳的球队如果没进球而对方进了球, 不用裁判来判, 所有的人都知道马拉多纳输了.

## 二、润物济苍生

3. 数学建模: 数学建模是对现实问题进行数学抽象, 用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建模型解决问题的过程. 主要包括: 在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题, 分析问题、构建模型, 求解结论, 验证结果并改进模型, 最终解决实际问题. 数学模型构建了数学与外部世界的桥梁, 是数学应用的重要形式. 数学建模是应用数学解决实际问题的基本手段, 也是推动数学发展的动力.

这一条说的是数学的去向: 解决实际问题. 要

用数学来解决实际问题, 就需要将实际问题转化为数学问题, 然后才能用数学中的现成工具和算法来解决. 数学建模的任务就是让数学的威力可以到达现实世界, 是沟通数学与现实世界的桥梁. 不仅是实际问题, 即使是数学自身提出的理论问题, 也需要用现成的数学工具来解决这些不现成的理论问题. 得到的结论如果可以广泛应用, 就成为新的理论. 用现成工具解决不现成的问题, 这就是数学建模.

既然数学建模是桥梁, 就要看它沟通哪两岸. 彼岸是需要解决的问题, 此岸是解决问题需要的工具. 另外三项核心素养就是提供工具.

4. 直观想象: 借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化, 利用图形理解和解决数学问题.

5. 数学运算: 依据运算法则解决数学问题.

6. 数据分析: 针对研究对象获得相关数据, 运用统计方法对数据中的有用信息进行分析和推断, 形成知识. 提升数据处理的能力, 增强基于数据表达现实问题的意识, 养成通过数据思考问题的习惯.

直观想象, 数学运算, 数据分析都是基本功, 解决问题的基本工具和基本武器. 就好比关羽的大刀, 张飞的长矛. 现在, 批评“应试教育”成为一种时髦, 不过批评都是口头上的, 行动上却都做得很起劲. 其实, “应试教育”有一个重要功劳不能抹杀, 那就是重视基本功的训练, 也就是重视这三条核心素养的培养. 一方面是因为应试离不了这三条核心素养, 另一方面是因为教师容易操作, 哪怕教师自己没有记熟背熟, 只要督促学生死记硬背勤学苦练, 也能出效果. 有点象巴甫洛夫训练狗, 只要多次重复就形成条件反射. 也象中国古话说的“熟读唐诗三百首, 不会做诗也会吟.”严格说起来, 这样培养出来的对基本功的熟练只达到这三条核心素养的一半, 或者只有一小半, 只记住了数学运算和数据分析的现成法则, 现成的几何图形的形状, 而这三条核心素养都还要求利用这些现成法则来解决问题, 那就不是巴甫洛夫的条件反射或熟读唐诗三百首所能达到的了. 不过, 要用现成法则解决不现成的问题, 其实是数学建模这条核心素养的要求. 现成法则是有限多, 可以通过强化训练让学生全部记住, 这就算是学会了. 但想要

用现成法则解决不现成的问题,却无论怎么训练也不可能把学生教会,其实老师自己也没有学会.这是因为,不现成的问题有无穷多,不管是考试的问题,还是现实生活和工作中需要解决的问题,都有无穷多,没有固定的方法,不可能把它们全部找出来,已经找出来的也不可能靠死记硬背掌握.正如围棋的棋经所说的“始以正合,终以奇胜”,学围棋先学规则,规则很简单,围棋开局还有一些定式可以背熟并在开局时依样画葫芦加以应用,这就是“始以正合”,类似于老师训练学生掌握基本运算法则.但是只记住了定式并不能赢棋,后面的走法就没有葫芦可以照着画,只能自己自由发挥,这就是“终以奇胜”.为了提高下棋水平,你可以学习别人的经验,可以看棋谱.但在下棋的时候决不可能把棋谱当成葫芦来照着画,按照棋谱来走棋.因为每一局棋都是新的,不可能照着走.棋谱只是起示范和参考作用,至于你能够参考到多少,那就没有一定之规,看各人的悟性了.“世事如棋局局新”,数学建模也是这样,用现成的知识解决不现成的问题,不现成的问题也是“局局新”,只能“终以奇胜”,谁也把你教不会.书上的案例,老师的讲解,也只是棋谱,只能起示范和参考作用,你能从中学到多少,只能“师傅领进门,修行靠各人.”

所以,我认为核心素养不是颠覆和取代“应试教育”,正如诸葛亮不能取代关羽张飞,而是指挥关羽张飞.关羽张飞离不了大刀长矛,正如“素质教育”离不了基本功的训练.而且,“应试教育”训练出来的基本功也是核心素养的组成部分.反过来,只有大刀长矛,没有人去使用,大刀长矛就只是两块铁,不能自己飞起来打仗.让阿斗或诸葛亮去使用,即使能打仗,也达不到关羽张飞的水平.同样地,只是训练了基本功,不会数学建模,不会用基本功来解决问题,考试就不能得高分,工作就不能做出好的成绩.严格说起来,数学建模不能说会还是不会,没有人完全会,大多数学生也不是完全不会,只有水平高低的差别.因此,不是要学会数学建模,而是要提高数学建模的能力和水平.

前两条核心素养是从无到有产生数学,从少到多发展数学,产生和发展的过程其实也是数学建模.得到的产品就是数学知识,组成强大的工具库供人类拿去解决新的问题.因此,核心素养就是

两件事:1.学习和掌握现成的知识作为工具.2.利用这些工具去解决新的问题.

### 教学案例

#### 一、我的教学生涯:从画五角星开始

1965年我高中毕业,看见中国科学技术大学的招生广告上华罗庚给数学系一年级本科生上课的照片,就报考了中国科学技术大学数学系,希望跟着华罗庚成为数学家.1970年大学毕业,却被分配到大巴山区去教公社小学附设初中班.我从小学中学到大学突出的优点是学习成绩好,突出的缺点是不会讲话,笨嘴拙舌.笨嘴拙舌怎么能当好教师呢?再加上山区的小孩基础差,名义上是初中班,大部分学生算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 等于 $\frac{2}{5}$ .这样的基础,怎么学懂初中数学?

正当我茫然无策的时候,学生的一个发现带来了柳暗花明.他们发现我有一个神奇的本事:画五角星比他们画得好.他们画五角星是歪的,左右两肩膀不一样高.我画五角星不但左右对称端正,而且无论怎样旋转仍然对称.他们觉得我这个“北京来的大学生”太神奇了.我受到启发,下一节课就教画五角星.

#### 例1 利用圆规、直尺、量角器画五角星.

解 利用圆规画圆.再利用量角器五等分圆周: $360 \div 5 = 72^\circ$ .

利用量角器画圆心角 $\angle AOB = 72^\circ$ .在圆周上依次截取 $AB = BC = CD = DE$ .连接 $AC, CE, EB, BD, DA$ 即得五角星.如图1.

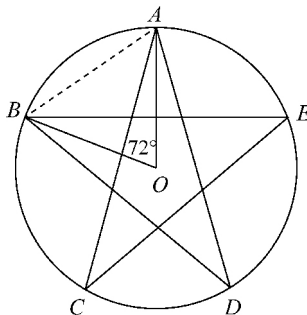


图1

一节课45分钟,学生全学会了.达到了什么教学效果?

- (1)学会了画五角星.
- (2)基本功:初中几何本来就应该教学生使用

圆规画圆,了解周角等于 $360^\circ$ ,使用量角器量角,等分圆周.这些都是基本功.如果一项一项分别教,枯燥无味.通过画五角星,全都学会了.培养了核心素养第4条直观想象能力,第5条数学运算能力.而且,利用简单的计算和画图工具这些现成知识解决画五角星这个实际问题,也是数学建模的一个示范案例.

(3)真理检验标准:五角星是否端正,不需要专家和领导来检验,每个人都可以一眼看出来,更精确的检验可以用刻度尺或圆规或量角器来度量五角星的各边长、各角的度数是否相等,人人都能检验,这就暗中颠覆了他们经验中或心目中真理由权威或权力说了算的观念,接受了一次“真理面前人人平等”,“道法自然”的教育.这也是前两条核心素养体现的观点.

(4)数学面前人人平等:这一节课之前,学生还认为画五角星的本领是我这个“北京来的大学生”的特殊身份特有的,对他们这些山村小孩是高不可攀的.一节课的功夫,他们就攀上来了,发现并不神秘,与身份无关,人人都可以学会.我画五角星我做主,不求神仙不求人.这个小小的例子使他们爱上了数学.原因在于,数学面前人人平等,能学多少学多少,不必去搞歪门邪道.这已经超越了数学核心素养的范围,是对世界观和人生观的培养.

以上这些话不是讲给学生听的,学生只要实际上有这些收获就行了,更不能出成考试题让学生按照标准答案来回答.我把它总结出来讲给老师听,也不是为了让老师们去宣传,而是让老师们心里明白,核心素养不是另外贴的标签,而是在教学过程中自然而然“润物细无声”.

后来给学生讲了三角函数,就改为不用量角器而用刻度尺画五角星.

例2 利用圆规和刻度尺画五角星.

解 先利用三角函数算出圆周角 $\angle AOB = 72^\circ$ .所对的弦长 $AB$ .

如图1.弦长 $AB = 2\sin\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right) = 2\sin 36^\circ \approx 2 \times 0.5878 = 1.1756$ .

以单位长 $OA = 1$ 为半径画圆.用圆规在刻度尺上量出长度1.1756.

在圆上依次截取 $AB = 1.1756 = BC = CD =$

$DE$ 得到五角星各顶点,连接成五角星.

例2培养的核心素养是三角函数的应用,是第5条核心素养数学运算的要求.借助于画图来加深对三角函数的理解,是第4条核心素养直观想象的要求.同一个问题画五角星用不同的方法来做,是数学建模的重要特点,让学生见识一下,不要死记硬背现成作图法,习惯于用不同知识解决问题.

## 二、左转两番演示平方得负

初中数学引入了负数表示相反方向的量. $(-1) + (-1) = -2$ 容易理解:先退一步再退一步,总共退了两步.这是用物体运动的模型来解释代数运算,也是代数运算的数学模型.千万不要教学生:这是书上讲的,把它背熟.

相比起来,负数乘法 $(-1) \times (-1) = +1$ 对很多人就难于理解了.能不能也用物体运动的模型来解释?我在教初中的时候编了两句顺口溜,用运动模型解释负数的加法与乘法:

退步再退步,负加负更负.后转两次转向前,负负为正很显然.

退步再退步,解释负数的加法.比如 $(-3) + (-2)$ 就是先退3步再退2步,共退了5步,就是 $(-3) + (-2) = -5$ ，“更负”就是退得更多.

乘 $-1$ 表示向后转,旋转 $180^\circ$ . $(-1) \times (-1)$ 就是连乘两个 $-1$ ,后转两次,转两个 $180^\circ$ ,一共转了 $360^\circ$ ,仍然面朝前方,恢复原来的方向,相当于乘1,这就解释了 $(-1) \times (-1) = 1$ .也就是 $(-1)^2 = 1$ .

既然 $-1$ 的平方是转两个 $180^\circ$ ,那么 $-1$ 平方根就是转半个 $180^\circ$ ,也就是转 $90^\circ$ .高中数学强行规定一个符号 $i$ 代表 $-1$ 的平方根.大部分学生也不觉得不对,因为他们已经被教育成对强词夺理习以为常了,觉得书上就是可以不讲道理随便规定.如果有的学生提出疑问:“以前说 $-1$ 没有平方根,现在怎么又可以规定出一个平方根了.”很多老师也许会批评这个学生:“听书上的,不要胡思乱想.”但是,如果用运动模型让乘 $-1$ 刻画旋转 $180^\circ$ ,再规定一个符号 $i$ 代表旋转 $90^\circ$ ,很自然就有 $i^2 = -1$ ,代表的运动模型是:连续旋转两个 $90^\circ$ 就是旋转 $180^\circ$ .我把这个模型也编成顺口溜:

平方得负岂荒唐,左转两番朝后方.

“左转”就是逆时针方向旋转  $90^\circ$ ，用  $i$  表示，左转两番就是  $i^2 = -1$ 。右转两番也是朝后方，表示  $(-i)^2 = -1$ ， $-i$  是  $-1$  的另一个平方根。

由“左转两番朝后方”的现象出发，用  $i$  表示“左转”这个动作，得出它的性质  $i^2 = -1$ ，这是通过数学抽象引入虚数单位  $i$ 。

这样来理解  $i^2 = -1$ ，也是“利用图形理解和解决数学问题”，培养直观想象的核心素养。

### 三、尺规作图画五角星

**例3** 不用量角器，不查三角函数表，利用圆规和直尺画五角星。

**分析** 如果能够不查三角函数表直接算出  $\cos 72^\circ$ ，就能够在单位圆的半径  $OA$  上截取  $OF = \cos 72^\circ$ ，如图2。再作  $OA$  的垂线  $FB$  交圆周于  $B$  得到圆心角  $\angle AOB = 72^\circ$ 。

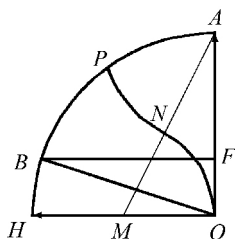


图2

将平面上的向量用复数表示。五角星有一个顶点  $A$  在正上方，我们将  $\vec{OA} = (1, 0)$  取作实数正方向上的单位向量，表示实数 1。  $\vec{OA}$  沿逆时针方向旋转  $90^\circ$  得到的  $\vec{OH} = (0, 1)$  表示虚数单位  $i$ ，如图2。则  $\vec{OA}$  旋转  $72^\circ$  得到的  $\vec{OB} = (\cos 72^\circ, \sin 72^\circ)$  表示  $\omega = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ 。用  $\omega$  乘 1 就表示将 1 代表的向量  $\vec{OA}$  旋转  $72^\circ$ ，将这个旋转动作重复 5 次，就是用  $\omega^5$  乘 1，总效果是旋转  $72^\circ \times 5 = 360^\circ$ ， $OA$  转了一圈回到原来的位置  $OA$ 。这说明

$$\begin{aligned} \omega^5 &= (\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)^5 \\ &= \cos(5 \times 72^\circ) + i \sin(5 \times 72^\circ) \\ &= \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\omega$  是方程  $x^5 = 1$  的根。它的整数次幂  $\omega^k = \cos(72^\circ \cdot k) + i \sin(72^\circ \cdot k)$  满足  $(\omega^k)^5 = (\omega^5)^k = 1^k = 1$ ，都是方程  $x^5 = 1$  的根。取  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  得到 5 个不同的根，它们代表的点  $A, B, C, D, E$  就是所要作的五角星的 5 个顶点。

将旋转  $90^\circ$  用字母  $i$  表示，得到了  $i^2 = -1$ ，这

是利用旋转模型引入新的数学概念，是数学抽象。同样利用旋转模型，得到了代表旋转  $72^\circ$  的复数  $\omega = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ ，进而得到了  $\omega^5 = 1$ 。同理可以得到表示旋转任意角  $\alpha$  的复数  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ ，它的  $n$  次幂就是旋转  $n\alpha$ ，由此得到新的数学公式

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

(棣美弗公式)

取  $n\alpha = 2k\pi$  ( $k$  为整数) 得到

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = 1$$

取  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  就得到方程  $x^n = 1$  的全部  $n$  个不同的复数根，称为  $n$  次单位根。它们在复平面上代表的点就是单位圆内接正  $n$  边形的  $n$  个顶点。

这是利用数学建模解决新问题、发明新公式的又一个范例。

**解** 复数  $\omega = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$  满足条件  $\omega^5 = 1$ ，它的正整数次幂  $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$  是方程  $x^5 = 1$  即  $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$  的全部根。

$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$  是方程  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  的全部根。

此方程的根不为 0，因此可以同除以  $x^2$  得到同解方程

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \tag{1}$$

令  $y = x + \frac{1}{x}$ ，则  $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ ， $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ 。代入(1)得到方程

$$y^2 + y - 1 = 0 \tag{2}$$

它的根为  $y = x + \frac{1}{x} = \omega^k + \omega^{-k} = (\cos k\alpha + i \sin k\alpha) + (\cos k\alpha - i \sin k\alpha) = 2 \cos k\alpha$ 。其中  $\alpha = 72^\circ k$ ， $k = 1, 2$ 。即  $y_1 = 2 \cos 72^\circ$  或  $y_2 = 2 \cos 144^\circ$ 。

解方程  $y^2 + y - 1 = 0$

$$\text{得 } y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

其中的正根为

$$2 \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

**作法** 任取单位长度为半径作圆。取相互垂直的半径  $OA$  竖直向上， $OH$  水平向左。如图2。

取  $OH$  的中点  $M$ ，则

$$MA = \sqrt{OA^2 + OM^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

以  $M$  为圆心,  $MO$  的长度为半径画弧交  $MA$  于  $N$ . 则  $AN = MA - NM = 2 \cos 72^\circ = 2 \sin 18^\circ$  是圆内接正十边形的边长. 在圆周上截取  $AP = AN = PB$ ,  $AB = BC = CD = DE$ , 得到正五角星的 5 个顶点  $A, B, C, D, E$ . 可连接成五角星.

例 2 的方法可以用来研究圆内接正  $n$  边形的尺规作图. 特别当  $n = 17$  时, 可以通过解若干个一元二次方程得到  $2 \cos \frac{2\pi}{17}$ , 从而得到圆内接正 17 边形的尺规定作图方法. 反过来, 三等分任意角, 当  $n = 7, 9, 11, 13$  的正  $n$  边形, 求作的线段长不能由已知线段经过加减乘除和解二次方程得出, 因此不能够用尺规作图实现.

#### 四、三八二十四: 胜造七级浮屠

大家都知道“三八二十四”. 可是有一个名人讲了一个三八二十三的故事, 还说这代表中国文化.

故事是这样的: 某朝代, 一个小痞子去买布. 每匹布 8 元钱, 他买了 3 匹布. 按照“三八二十四”的乘法口诀, 他应该付 24 元钱. 可是小痞子不承认“三八二十四”的口诀, 说应该是“三八二十三”, 只承认付 23 元. 在场一位小和尚出来打抱不平, 说应该是“三八二十四”. 小痞子说我们去请你师父评理. 如果你师父说“三八二十四”, 我就认输, 我把我的头输给你. 如果他说“三八二十三”, 你就输了, 你把你的帽子输给我. 结果师父判了“三八二十三”, 小痞子赢了. 小和尚气愤地问师父为什么胡说八道. 师父说: 他输了是输一条命, 你输了只输帽子. 出家人慈悲为本, 怎么能要他的命呢? 名人讲完了这个故事, 说这就代表了中国文化.

我在网上查了这个故事, 想看那位老和尚是哪个朝代的哪位高僧. 结果发现有两个版本, 一个版本说的不是老和尚而是孔子. 而那位见义勇为的小和尚换成了颜回. 由此知道这个故事并非历史, 而只是一个寓言. 我让我的学生对此发表意见和感想, 很多人都赞成老和尚的处理办法, 说总不能为了一元钱就让一个鲜活的生命消失. 我反问: 为什么你们觉得如果判了 24, 小痞子就会死? 他们惊讶地说: 他们打了赌呀, 打了赌就要守信用嘛. 我说: 小痞子连“三八二十四”这样的宇宙真

理都不承认, 他怎么会遵守打赌的约定呢? 这也是逻辑推理. 更何况, 这个赌约本来就是违法的, 当初小和尚就不应该同意, 老和尚也不应该同意. 如果官府出面, 不但不会帮助执行这个赌约, 反而会把打赌的两人各打五十大板, 惩罚他们违法订约之罪. 为什么学生潜意识会觉得两个人订的赌约一定要遵守? 是因为他们觉得两个人订的约定就必须遵守. 而“三八二十四”不知道是谁订的, 违反了也没人管, 可以不遵守. 这也是长期教育熏陶形成的中国文化: 真理只服从人, 不服从客观规律.

三八二十四还是二十三, 谁说了算? 老和尚说了算吗? 也许有人说: 老和尚不是数学专家, 说了不算, 应该去问数学家. 那就要问: 足球赛的输赢该问谁? 问国际足联还是问马拉多纳? 其实, 什么人都不用问, 自己看球赛, 看谁进球进得更多的, 就是赢家. 也就是说: 不由人说了算, 而由规则说了算. 规则大家都懂, 判断出来都一样. 如果你真找到马拉多纳, 他可以不回答你, 而是打开电视机让你看录像.

同样地, 即使你真去问老和尚, 如果老和尚既有德行也有智慧, 他就应该不直接告诉答案, 既不说 23 也不说 24, 而是让小痞子自己去找答案. 甚至也不必找答案, 只要付钱就行了. 小痞子不承认 24 不要紧, 只要承认三八, 每匹布付 8 元钱就行了: 第一匹布掏 8 元钱, 第二匹布、第三匹布, 都掏 8 元, 付三个 8 元就行了, 不用管它是 24 还是 23, 拿布走人. 老和尚只告诉你掏三个 8 元, 没说 24, 也没说 23, 按照赌约, 小痞子既没输也没赢, 平平安安回家去. 如果非得要数, 那就拿三叠钱每叠 8 张, 一张一张数一遍, 数出来是多少就是多少. 老和尚不来判. 只要两人都会数钱, 也承认数钱的结果, 自然就达成了共识. 老和尚不告诉答案, 只告诉寻找答案的方法——数数. 这就是授之以渔而不授之以鱼. 既使数出来是 24, 老和尚并没有说 24, 也不违反赌约.

虽然老和尚判“三八二十三”既不道德也不智慧. 但是名人说“三八二十三”是中国文化却还有几分道理. 三八二十三就是随心所欲篡改真理, 这确实是中国文化的一部分, 而且源远流长, 代表人物很多. 东周有周幽王烽火戏诸侯, 秦朝有赵高

(下转第 14 页)

部和外部原因。内部原因：比较年轻，处在新手向专家过渡的阶段；能较快接受教育新观念，认同并践行了一些较先进的教育理念；喜欢读书，虚心学习教育理论，知识面比较广博；教学技能较强，探索出一些有效的教学策略，初步形成自己的教学风格。外部原因：班级的教学实验为两位老师带来了新的理念与方法；推进教学改革与保证考试成绩之间并没有发生冲突；校长积极推动课题研究，经常倡导新的教学观念，鼓励教师拓展教科书。

对案例的反思：这是典型的质性研究方法，研究深入细致，资料收集翔实，在一定程度上揭示了两个教师创造性使用教材的表现和原因，研究

规范。

#### 参考文献

- [1]陈向明. 教师如何作质的研究[M]. 北京：教育科学出版社，2001：12
- [2]喻平. 数学教学心理学[M]. 北京：北京师范大学出版社，2010：253-308
- [3]叶立军，斯海霞. 基于录像分析背景下的代数课堂教学提问研究[J]. 教育理论与实践，2010(3)
- [4]康翠，刘美凤. 不同专业发展阶段教师教案编制的质性研究[J]. 电化教育研究，2013(11)
- [5]王世伟. 他们为什么能够创造性使用教科书——对两位新教师的质性研究[J]. 当代教育科学，2008(12)

(上接第6页)

指鹿为马，宋朝有秦桧的莫须有，都是古代的老祖宗。也许你认为23与24只差一元钱，让一步有何不可。不过这些老祖宗却不只多付1元钱，而是让很多人丢了命。周幽王自己规定举烽火表示有敌军来犯，为了逗妃子笑却举了一次假烽火，敌人没来也举了，以为只是开个玩笑，后果却是：下次敌人真来了，举真烽火也没人相信，丢了很多条命。赵高与胡亥李斯合谋篡改始皇遗诏，杀了扶苏和蒙恬，玩了一次三八二十三，然后他们又把把这个三八二十三的游戏继续玩下去，三个人之间相互杀，赵高杀了李斯和胡亥，赵高也被秦三世以同样的方式杀掉了，秦朝也灭亡了。秦桧用莫须有杀了岳飞，以后自己也变成铁像跪在岳飞面前直到现在。损失的都不止一元钱。三八二十四是一个定理，变成二十三，就是另外一个定理。定理就会反复使用，每使用一次相差1元钱，反复使用就可以谬之千里了。那个名人为什么说“三八二十三”是中国文化？理由是坚持真理“三八二十四”会让人丢命，篡改真理的“三八二十三”才会救命。小痞子们的故事只是子虚乌有，周幽王赵高秦桧的“三八二十三”可是实实在在的历史，让千百万人头落地，害了别人，也害了自己。不过，中国文化不只是“三八二十三”，还有“三八二十四”。例如比干，屈原，文天祥，还有文天祥的正气歌中列举的体现天地正气的一大批人，都是宁肯丢命也要坚持“三八二十四”。其中有些人确实丢了命，但是他们的丹心照汗青。还有人没丢命，如文天祥正气名单中

的张良，严颜，同样照汗青。

三八二十三的文化不只害了古人，而且流传至今继续害死人命。例如，野生动物园大字写明“珍爱生命禁止下车”，这也是“三八二十四”，有的牛人却偏要下车，认为谁也管不着。这也是三八二十三的信徒。人管不着，老虎却管得着，“老虎要吃人”是个定理，咬你没商量。所以，“三八二十四”这个口诀不仅是拿来应付考试的，也是拿来救命的。它教的核心素养就是敬畏规则，遵守规则。不是为了服从别人，而是为了保护自己。具有这样核心素养的人多一个，继承三八二十三中国文化的人少一个，被老虎咬死或者被汽车撞死的人就会少一个，数学教育的功德就多一分，胜造七级浮屠。

高中数学课标规定的第二条核心素养是“逻辑推理”，由公理推出定理。看起来小学算术没有公理，小学生也不会逻辑推理。实际上，小学算术从数数开始，数数就是算术公理，称为皮亚诺公理，挺高大上的名字。小学教学生掰手指数数，“掐指一算”，就是用算术公理进行逻辑推理。三八二十四的乘法口诀是数三个8得到的。 $3+2=5$ 也是数手指数出来的：先伸出3个手指，再伸2个，摆到一起数出来是5个，这就得到了 $3+2=5$ 。这也是逻辑推理。 $3+2$ 中的2就是 $1+1$ ，与3摆到一起就是 $3+(1+1)$ 。数数的时候，先数完3，再把2拆成 $1+1$ ，先数1个得到4，再数1个得到5，也就是 $3+(1+1)=(3+1)+1$ ，这就是加法的结合律。如果反过来先数2再数3，就得到 $3+2=2+3$ ，加法交换律。(未完待续)