命题有道　研修无界

——漫谈中考数学命题与复习

莆田市教师进修学院　蔡德清

一、研命题智慧思考

基础教育中“考、教、学”三者之间关系密切，在应试制度之下，考试被喻为指挥棒，成为教和学的中心。考试评价作为基础教育体系中重要的组成部分，理论上我们对考试的研究要走在前面，并且以考导教、以考导学。

福建省统一中考三年了，考试在改革中前行。由于福建省中考命题尚无检测标准，中考试卷易受招生政策、教学现状，还有命题者的知识爱好、能力水平等因素影响，试卷的命制更多依靠命题教师的经验。试卷如何兼顾毕业与升学两方面，目前尚无科学的论述与论据，中考命题远未成熟。

考试最核心内容便是命题，中考命题是个非常严肃又敏感的话题，命题人员往往不能够随便发声。普通教师很难听到关于命题的真实声音，从而也很难掌握命题的技巧，使得中考命题越发神密并且困惑重重。命题，是一项技能，更是一份事业。它不需要神圣的光环，也不该被无理地苛责。我们对命题在专业方面的评价多一些，数学教育才会变得更好。

关于命题的智慧思考也是哲学思考，应重点关注以下四个方面：命题是什么（内涵、本质）、要命成怎样（目标、价值）、怎么去命题（过程、方法）、结果又如何（评价、反思），这是命题研究的核心内容。

1.命题的内涵与本质

何谓命题？命题直译起来就是命制题目，中考数学命题便是命制用于中考的数学题目，这个时候命题应该是行为动词。若形象一点，命题有两层含义：一个叫待设计的问题，一个叫正在尝试的方法，这两者合起来就叫命题。命题是一种对话，与教材对话，与课标对话，与教学对话，与教师对话，与学生对话，与自我对话。与教材对话：教材是命题的重要载体，怎么演绎？与课标对话：课标是命题的重要依据，怎么理解？与教学对话：命题是对教学的一种导向，你要导向哪儿？与教师对话：教师是命题评价的桥梁，关心通向哪儿？与学生对话：学生是命题评价的主体，检测公平公正科学吗？与自我对话：命题是命题者对课标、教材、教学的一种理解、演绎、解读，更是对自己知识的检索、智慧的考查、灵魂的鞭挞。

正如福州教育研究院李霞老师所说的：在诸多教育教学的技能中，命题是最累的，也是最有创造性的一项技能。这不仅需要教师要有一种对试题命制研究执着的情怀，更需要对教材教学的深刻理解。目前基层教师对命题的认识远不到位，大都认为命题是教研员或命题者的事，老师只要会解题就够了。命题工作处于自发状态，基本形式以选题、拼题以及简单的编题为主，体现在：离原创远、与改编近；离改编远、与抄袭近；离创新远、与模仿近；离合作远、与单干近。研究中考试题，不仅是命题者的事，也是教师一项常态化的工作，要认真去感知问题的发生、发展过程，明晰问题的来龙去脉，寻求问题的解决方法，探求问题的拓展延伸，揭示问题的本质特征，才能领悟中考命题的意图，向学生讲清楚试题的实质，发挥试题的巨大功能。

福建师范大学数学与信息学院的柯跃海教授在讲座中有个形象比喻“熟练教师选题用于教学，骨干教师改题用于教学，教学名师编题用于教学”。事实上名师未必会命题，而会命题的老师一定会成为名师。

2.命题的目标与价值

命题是命题者用适当的方式把师生带到正确的地方，这个地方一定是有意义的，有价值的，这种方式一定是科学的，合理的；未来希望这个地方一定是公开的、透明的。命题对教学有较强的导向作用，因此代表地区最高水平的命题一定要体现该地方的教育特色、教学追求。但命题也不能被教学绑架，试题应体现数学的知识、技能、方法、思维、能力、思想、活动、素养等数学本质，还有应体现立德树人的教育价值，理性思维与人文精神的有机融合等。

一道好题并不在于它的深奥，而在于它的导向和示范作用。好的中考试题往往不一定都是新题，它往往就来源于教材，既能引导师生重视教材作用和对基本知识的学习，又能让师生意识到仅仅靠题海战和死记硬背是无法在中考中取得高分。

3.命题的过程与方法

爱因斯坦曾指出："提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决一个问题也许仅是一个数学上的或实验上的技能而已，而提出新的问题，新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步。"创造一个问题比解决一个问题远为困难，创造问题几乎没有什么一般的准则。正如数学大师华罗庚教授所言："出题比做题更难，题目要出得妙、出得好、要测得出水平。"

解题只是命题的基础，解决的是"原材料"的问题。作为命题者，对题的关注不能停留在"怎样解"的层面，要尝试读懂并理解别人的题目，还要结合命题理论琢磨一道好题、一份好卷是怎样构成的。

在信息时代，用一些搜题工具一照，试题就现出原型。对已有试题的直接移用或简单改编（借用或改编外地市中考或质检题、竞赛题、中考题的下放等）由于公平性等原因，不适宜出现在高厉害的中考中。因此对试题的深度改编或者原创是所有命题人必须具备的一项专业技能，也是一项高级技能。

数学老师都会解题，但会命题的老师屈指可数，这是一个值得反思的现象。2019 年福建省蔡德清名师工作室初中数学命题研修活动活动重点是引导教师关注命题，参与命题，学会命题。活动有专家的讲座引领，教师的实践展示，还有命题作业、作品点评等，让参训教师边学习、边实践、边反思，活动反响较大，意义深远。

4.命题的评价和反思

数学试题来自现实世界和数学自身，命题考查的内容常见取材于现实世界、现有教材、教学实践、经典试题、竞赛试题、国内外文献资料、各种版本的教材、数学史、上位知识（大学与高中知识，特别是高中知识）等。

经过多年的中考实践，现在的中考试题情境新颖，构思独特，设问别致。这其中包含了命题者的大量心血，但命题者研究设计的路径却隐藏于题外，若解后不注意反思、总结，则很难捕捉中考命题的基本走向，试题考查的深度与广度也不易被发掘，久而久之，只能是广种薄收。

评价数学测试题，常从命制立意，试题的解法，试题的背景，试题的变化，试题的导向等几个方面进行。运用测量学的有关理论，进行效度、信度、难度、区分度等方面的数据分析，还要看能否起到良好的启示与导向作用，也就是定量分析与定性解释。

认真研究中考试题，活化中考试题，进一步开发中考试题，拓展其教育功能，是中考复习的有效途径之一。以中考试题为基本素材，对试题进行命制探究、变式拓展和背景解读，实际上就是对中考试题的"二次开发"，为教师的授课提供有益的、切合学生学情的案例，其目的就是让中考试题更有利于学生对数学知识的理解和思维的发展。

未来中考命题应逐渐从经验走向理性，建立起考前、考后与中学教师、教研人员的密切沟通机制。考前沟通，是为了了解教学实际；考后沟通，是为了了解试题的实际影响。改革的阵痛和困惑，对未来数学教育给出了诸多启示与警醒。中考命题与课标、核心素养的对接

仍需我们深入研究，考试结果对于教学的诊断与引导价值仍有待开发，命题技术层面的科学性、创新性仍有待提高……。

二、命题，行走的风景

1.命题标准

分析一份试卷应从定量和定性两个方面，定量依据测量学中难度、信度、效度、区分度等，体现了检测的工具性，主要是可观可测；定性从导向性、科学性、适标性、公平性、教育性、思想性、创新性、可推广性等对试卷进行描述，体现了检测的价值性，反映试卷的目标和追求。

2.命题依据（指导思想）

一个目标：立德树人、服务选拔、导向教学；（高考）

两个依据：《义务教育数学课程标准（2011 年版）》

《福建省初中学科教学与考试指导意见（数学修订版）》

三个关注：关注数学概念的理解与解释，

关注数学规则的选择与运用，

关注数学问题的发现与解决；

四个注重：基本知识，基本技能，基本思想，基本活动经验（四基）

四个能力：发现问题、提出问题、分析问题、解决问题（四能）

五个原则：立足基础，着眼素养，合理综合，关注应用，适度创新

即：注重四基，突出能力，关注理性思维，明晰教学导向.

六个核心素养：数学抽象，逻辑推理，数学建模，直观想象，数学运算，数据分

3. 命卷程序

4.命题方法（原则、策略）

常用方法：演绎深化、改造变形、陈题推广、构造模型

常用技术①添加法：从一个基本图形出发，通过添加若干线段，找出其中所蕴藏的若干有价值的结论，选择适宜的结论，以适当的方式与题型，编成题目。

②叠加法：从两个基本图形出发，通过图形的特殊叠放，或在此基础上添加适当的线段，从中找出有价值的结论，进行编题。

③变换法：以图形的变换为主要手段构造情境。

④运动法：以图形的运动（平移、折叠、旋转）为主要手段构造情境。

⑤ 一般化或特殊化：对情境进行一般化或特殊化处理，看结论是否发生变化。

⑥借鉴：借鉴已有的情境。

⑦定义：重新定义新的概念、图形、符号、法则、问题等。

三、压轴题，最美的风景

命题视角下的中考数学压轴题

“压轴”原本是戏曲名词，指一场折子戏演出的倒数第二个剧目。因为最末一个剧目称为大轴，而倒数第二个剧目紧压大轴，故得名压轴戏。在现代社会中有很多应用，比如“压轴戏”，但压轴也是人们知识的一个盲区。压轴本意是指倒数第二个节目，而不是人们常说的倒数第一个，第六版《新华字典》已把倒数第二个节目改为倒数第一个，第八版《新华字典》又把倒数第一个节目又改为倒数第二个。在中考试卷中我们把倒数两道试题统称为压轴题也比较应景。显然压轴题是一份试卷的精华，也是灵魂，因此有得压轴题者得中考之说。

压轴题的目标是选拔功能,意图通过压轴题考查学生的综合素质，尤其是分析问题、解决问题的能力，发现挖掘学生继续升学的潜力。因此压轴题给人的印象是难度大、区分度高，但压轴题一般设置层次分明的台阶，入口宽，上手容易，深入难，综合能力强。

压轴题常以支撑整个初中数学的核心知识与重要思想方法为载体, 突出能力考查，对学生的阅读能力、计算能力、理解能力、思维能力有较高的要求；压轴题突出了对数形结合、归纳概括、转化化归、分类讨论、函数与方程、演绎推理等主要数学思想方法的考查。因此压轴题是区分度和综合性的集中体现,也渗透了命题者对中考方向的理解，同时也为初中数学教学指明方向。

若以知识为载体，研究近几年全国中考数学卷压轴题考查的内容，大多可分成以下两类:一类是“以几何为载体考查函数或几何”，另一类是“以函数为载体考查函数或几何”。如下表：

中考数学压轴题的分类

试题载体	考查内容		
以几何为载体	考查几何	考查函数	考查几何与函数
以函数为载体	考查几何	考查函数	考查几何与函数

其中几何的载体有三角形、四边形、圆、组合图形（由基本图形构成）等，其中以三角形、四边形为重点。函数的载体有一次函数、二次函数、反比例函数、复合函数（由几个学过的函数构成）等，其中以二次函数为重点。

几何考查的内容有图形形状的判定（等腰三角形、直角三角形、平行四边形、梯形等)、图形的大小（角度的大小、线段的长度、图形的周长或面积的大小等）计算、图形的关系（平行、垂直、相似或全等）判定、图形的变换（平移、旋转、对称、相似）等。图形就运动对象而言有点动（点在线段或弧线上运动)，线动（直线或线段的平移、旋转）和面动（部分图形的平移、旋转、翻折）等。

函数考查的内容有求函数的解析式、求相关点的坐标、求函数的最值、求变量的取值班范围、研究函数的图象、函数的性质，研究函数方程不等式之间的关系、研究两个函数之间的关系等。代数方面涉及的知识主要有方程、函数、不等式、坐标、和解直角三角形（三角函数）等。

几何中考查代数，代数中考查几何，代数与几何融为一体，是数形结合的完美体现，这类试题具有较强的综合性、灵活性、和开放性。根据这样的分析，可把压轴题分为两类，也有人把压轴题分为三类，分别为几何压轴题、代数压轴题、代数与几何结合的压轴题。

若以题型为特征，压轴题设置常见有创新型（学习型）试题、过程性（探究型、开放型、运动型、操作型）试题、应用型试题、高初中衔接试题等。

案例分享：

案例 1：异构同源，殊途同归，推陈出新

——从 2018 年和 2019 年福建省中考数学第 25 题殊途同源谈起

审视 2018 年和 2019 年福建省中考数学第 25 题，皆是以二次函数为背景，叠加函数图象性质及若干简单几何图形的性质，考查学生数学抽象、直观想象、数学运算和逻辑推理等数学核心素养，考查学生对函数与方程，数形结合，化归与转化，特殊与一般等数学思想方法，作为中考试卷的压轴题，具有一定的难度、区分度，且带有浓厚的地域命题特色. 对这两道题深入思考，解读其问题结构，研讨试题的背景本质殊途同归，并探究试题的延展性，对中考命题与复习都很有价值..

一、析题反思

1、考题再现

试题 1、(2018 年福建第 25 题)已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(0，2)$．

(1)若点$(-\sqrt{2}，0)$也在该抛物线上，求 a，b 满足的关系式；

(2)若该抛物线上任意不同两点 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$都满足：当 $x_1<x_2<0$ 时，$(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0$；当 $0<x_1<x_2$ 时，$(x_1-x_2)(y_1-y_2)<0$．以原点 O 为心，OA 为半径的圆与抛物线的另两个交点为 B，C，且△ABC 有一个内角为 60°．

①求抛物线的解析式；

②若点 P 与点 O 关于点 A 对称，且 O，M，N 三点共线，求证：PA 平分∠MPN．

试题 2、(2019 年福建第 25 题)已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(b<0)$与 x 轴只有一个公共点．

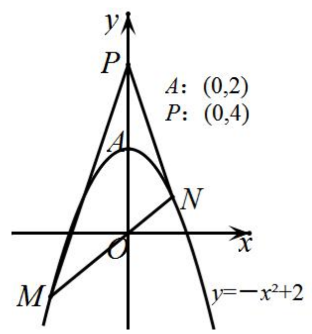
(1)若抛物线与 x 轴的公共点坐标为(2，0)，求 a、c 满足的关系式；

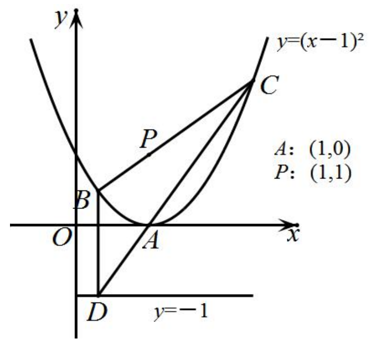
(2)设 A 为抛物线上的一定点，直线 l：$y=kx+1-k$ 与抛物线交于点 B、C，直线 BD 垂直于直线 $y=-1$，垂足为点 D．当 $k=0$ 时，直线 l 与抛物线的一个交点在 y 轴上，且△ABC 为等腰直角三角形．

①求点 A 的坐标和抛物线的解析式；

②证明：对于每个给定的实数 k，都有 A、D、C 三点共线．

对于两个例题中的核心问题第②小题的求解为算证类，如下图，通过“几何直观”较为容易得到结论．





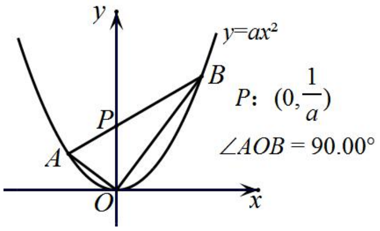
2、试题核心结构提取

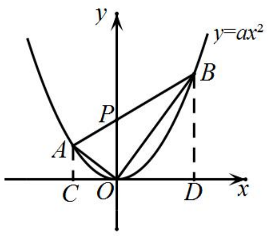
波利亚在《怎样解题》中指出一道题目的价值不仅在于该题的解法结论，而且应综合全面的看待条件与条件，条件与结论，洞察问题的深层结构．对于上述试题 1 与试题 2，探求其解法，溯源求本，我们发现这两题从过抛物线对称轴上一定点的弦与割线之间几何性质为本源，研究抛物线对称轴上的点与线对偶时，“运动中的定值，变化里的恒量”．下文特殊化抛物线，寻找本质背景，不妨令抛物线的解析式为 $y=ax^2(a>0)$，其中点 P 为其对称轴上一定点．

3、借题发挥，结论推广

我们采用“采蘑菇”的方式进行思考：是否有后续结论，结论能否一般化，是否存在等价结论……

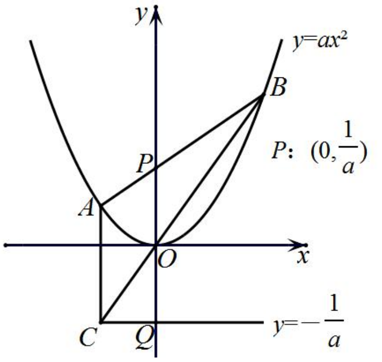
命题 1　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，\frac{1}{a})$的直线 l 与抛物线交于点 A、B，连接 OA、OB，证明：∠AOB=90°．





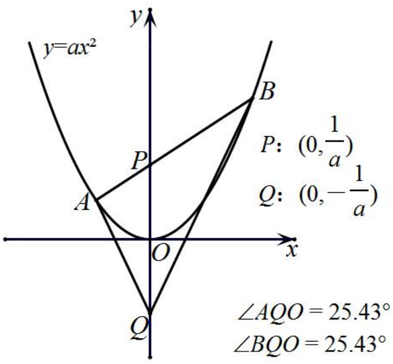
在命题 1 的基础上，继续探究抛物线对称轴上的点与线对偶问题．

命题 2　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，\dfrac{1}{a})$的直线 l 与抛物线交于点 A、B，直线 $AC\perp$ 直线 $y=-\dfrac{1}{a}$ 于点 C．证明：B、O、C 三点共线．



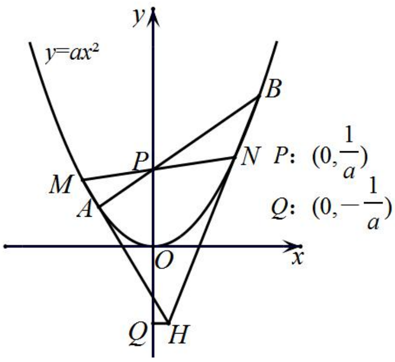
可以发现该命题为 2019 年福建中考数学第 25 题的题源．

命题 3　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，\dfrac{1}{a})$的直线 l 与抛物线交于点 A、B，若点 P 与点 O 关于点 Q 对称，连接 QA、QB．证明：$\angle AQO=\angle BQO$．



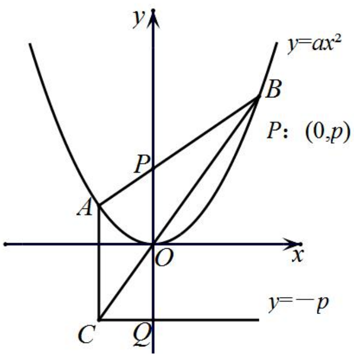
该命题为 2018 年福建中考数学第 25 题的题源．由此可以发现这两年的试题，殊途同源，本质一致．继续探究，还可以有以下结论：

命题 4　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，\dfrac{1}{a})$的直线 AB，直线 MN 分别与抛物线交于点 A、B、M、N，连接 MA、BN 并延长交于点 H．证明：点 H 的运动轨迹在直线 $y=-\dfrac{1}{a}$上．

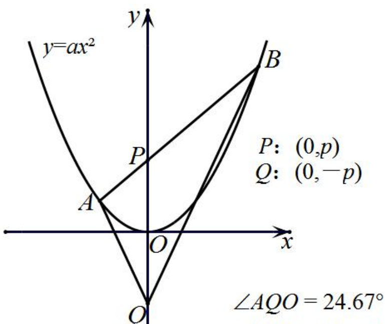


继续探究，当点 P 在 y 轴正半轴运动时，可以发现命题 2、3、4 为以下命题的特殊情况，因此证明过程见下述命题.

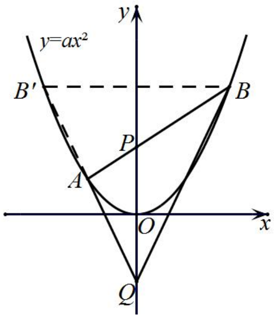
命题 5　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，p)$(其中 $p>0$)的直线 l 与抛物线交于点 A、B，直线 $AC\perp$直线 $y=-p$ 于点 C．证明：B、O、C 三点共线.



命题 6　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，p)$(其中 $p>0$)的直线 l 与抛物线交于点 A、B，若点 P 与点 O 关于点 Q 对称，连接 QA、QB．证明：$\angle AQO=\angle BQO$.

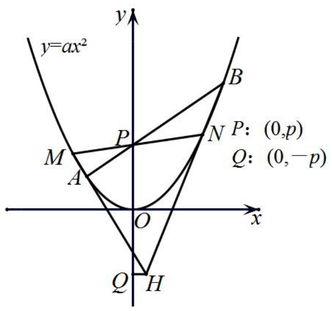


在此基础上，还可以继续探究：如图，根据对称性，延长 AQ 交抛物线与点 B'，则点 B' 与点 B 关于 y 轴对称.



命题 7　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，p)$(其中 $p>0$)的直线 AB，直线 MN

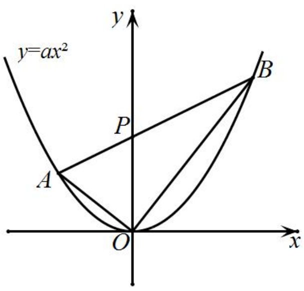
分别与抛物线交于点 A、B、M、N，连接 MA、BN 并延长交于点 H．证明：点 H 的运动轨迹在直线 $y=-p$ 上．



限于篇幅请读者自己证明．

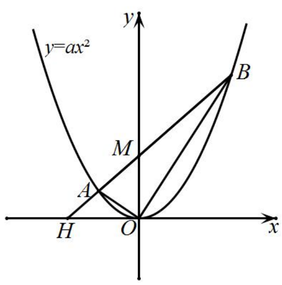
回归到命题 1，当点 P 位置特殊时，有 $OA\perp OB$，当点 P 位置一般化，则 OA，OB 有何关系？

命题 8　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，p)$(其中 $p>0$)的直线 l 与抛物线交于点 A、B，连接 OA、OB，证明：$\tan\angle AOP\cdot\tan\angle BOP=\dfrac{1}{ap}$．

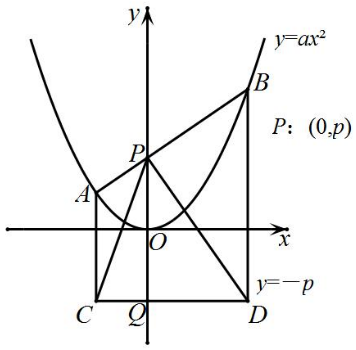


考虑在 x 轴上的特殊点，结论如何？

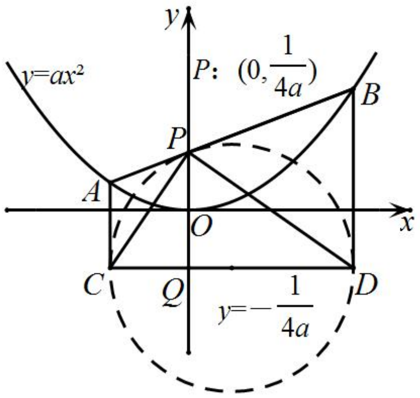
命题 9　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $H(h，0)$(其中 $h<0$)的直线 l 与抛物线交于点 A、B，与 y 轴交于点 M，连接 OA、OB，证明：$\tan\angle BOM-\tan\angle AOM=\dfrac{1}{ah}$．



命题 10　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，p)$(其中 $p>0$)的直线 l 与抛物线交于点 A、B，直线 $AC\perp$直线 $y=-p$ 于点 C，直线 $BD\perp$直线 $y=-p$ 于点 D，直线 $y=-p$ 交 y 轴于点 Q．连接 CP、PD，证明：$\tan\angle CPQ\cdot\tan\angle DPQ=\dfrac{1}{4ap}$．

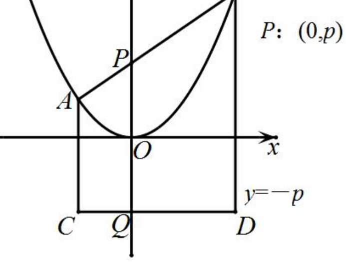


特别地，当 $ap=\dfrac{1}{4}$，即 $p=\dfrac{1}{4a}$ 时，$\tan\angle CPQ\cdot\tan\angle DPQ=1$，故如图，①∠$CPD$=90°；②以 CD 为直径的圆与 AB 相切于点 P；③CP 平分∠APQ，DP 平分∠BPQ.



当抛物线对称轴上的点与线对偶时，探究线与线间的数量关系？

命题 11　如图，已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$，过点 $P(0，p)$(其中 $p>0$)的直线 l 与抛物线交于点 A、B，直线 AC⊥直线 $y=-p$ 于点 C，直线 BD⊥直线 $y=-p$ 于点 D，直线 $y=-p$ 交 y 轴于点 Q．证明：$\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BD}=\dfrac{1}{p}$(或$\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{BD}=\dfrac{2}{PQ}$).



基于以上的考虑并结合上述探究所得该类试题的一系列结论，同时运用命题技术，具体题目案例分析：

(1)条件改造变形：在不改变问题背景的前提下，改变问题的提问角度或问题的呈现形式，类比变形演绎深化创造出新的命题．以命题 1 和命题 8 为题源：

例 1、直线 l：$y=kx+b$ 与抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 交于点 A、B，与 y 轴交于点 P，连接 OA、

OB．

(1)若 b=2，证明：对于每个给定的实数 k，都有$\angle AOB$=90°；

(2)若 b＞0，证明：对于每个给定的实数 k，都有 $\tan\angle AOP\cdot\tan\angle BOP=\dfrac{2}{b}$；

(3)若 b=2k＋4，在抛物线上存在定点 D 使$\angle ADB$＝90°，求点 D 到直线 AB 的最大距离．

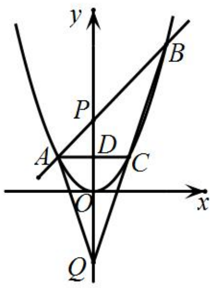
(2)问题替换，逆向变式，将条件结论互换，改变问题的呈现形式，以命题 6 为题源：

例 2、如图，直线 l：$y=kx+b$ 与抛物线 $y=x^2$ 交于点 A、B，与 y 轴交于点 P，点 C 与点 A 关于 y 轴对称，连接 AC 交 y 轴于点 D，连接 BC 交 y 轴于点 Q，连接 AQ．

(1)证明：对于每个给定的实数 k，都有$\angle AQP=\angle BQP$；

(2)对于每个给定的实数 k，$\dfrac{DP+DQ}{OP}$是否为定值？若是，试求出该定值；若不是，请说明理由．

(3)当 k 为何值时，$S_{\triangle ABQ}$的面积最小？并求其最小值(用含 b 的式子表示)．

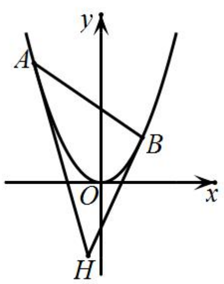


(3)推广拓展，扩大问题条件中有关对象的范围，以命题 7 为题源：

例 3、如图，$\triangle ABH$ 的顶点 A、B 在抛物线 $y=x^2$ 上，两条直线 AH、BH 与抛物线 $y=x^2$ 均有唯一公共点．

(1)若直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，证明：点 H 的运动轨迹在直线 $y=-b$ 上；

(2)若$\triangle ABH$ 的面积为 2，设 A、B 两点的横坐标分别为 m，n，求 m 与 n 的数量关系．



(4)上述的试题，为了加强对二次函数本质属性的考查，可以通过位置变换，在二次函数解析式 $y=ax^2+bx+c$ 中增加系数变量 a，b，c 之间的关系，突出有关二次函数的图象与性质，问题的结论仍然不变．福建省 2019 年中考第 25 题即是通过平移，改变抛物线的位置．

随着新课程改革步入深水区，中考的命题理念从能力立意转变为核心素养立意，二次函数压轴题的命制从知识与方法的应用、从情境的设计、从问题的提出与解决都将服务于核心素养的评价，服务于核心素养评价的综合性、层次性．通过对数学核心素养水平化、可量化的科学评价研究，将更好地实现压轴题精确区分考生合理选拔的功能．

案例 2：函数含参更回看，运算推理别有天

——二次函数压轴题的命制与思考

二次函数为载体的中考数学压轴题成为全国的热点，纵观近几年的中考试题，二次函数的命题主要有以下特点：①以二次函数为载体，实际上考查几何图形形状的判定、图形关系的判定、图形大小的计算，这类试题的特点是二次函数的解析式固定，在试题后续发展中二次函数图象对试题而言是无关紧要，甚至是无谓的干扰；②“涉高”类二次函数试题，此类试题是将高中抛物线第二定义(焦点、准线)提早隐性介入，引入参数，考查数式等数学运算，试题的形式显而易见；③对二次函数的解析式引入变量系数，通过控制变量对函数图象的影响并结合一些简单的几何图形性质及变换，考查学生的代数思维，弱化对几何图形的考查，突出对函数本质的考查(图象、基本特征和性质等)，着重对代数式的恒等变形，方程不等式及其解等代数核心知识的考查．

结合函数的本质和压轴题的特征来看的话，第一类试题属于“伪抛物线题”，当二次函数解析式固定后，后续生长出来的问题已无关函数且繁杂的几何构造不宜组合在函数试题中，考查的核心往往会偏向几何；第二类试题把高中知识隐性移植到中考需慎重，因为试题所传达的“公平性”、“导向性”和“适标性”有争议；第三类试题的命制关注含参的函数，关注函数本质与代数推理等，应是二次函数压轴题的命题趋势．现以 2019 年莆田市九年级市质检一道“二次函数”压轴题的命制为例，探讨这一类试题的命题价值和意义、方法与策略．

一、试题展示

函数 $y_1=kx^2+ax+a$ 的图象与 x 轴交于点 A，B(点 A 在点 B 的左侧)，函数 $y_2=kx^2+bx+b$ 的图象与 x 轴交于点 C，D(点 C 在点 D 的左侧)，其中 $k\neq0$，$a\neq b$．

(1)求证：函数 y_1 与 y_2 的图象交点落在一条定直线上；

(2)若 $AB=CD$，求 a，b 和 k 应满足的关系式；

(3)是否存在函数 y_1 和 y_2，使得 B，C 为线段 AD 的三等分点？若存在，求 $\dfrac{a}{b}$ 的值；若不存在，说明理由．

试题以互为关联的两个含参的二次函数为载体，通过图象与 x 轴交点产生的线段大小变化考查了函数与方程、数形结合、特殊与一般、类比与转化、分类与整合等重要数学思想方法，对逻辑推理、数学运算、数学抽象、直观想象等核心素养的考查比较到位，体现了数学的理性思维和数学探究．业内老师都评价这两个函数选择比较巧妙，三个问题设置层次明显，条件看似简单内涵丰富，问题看似独立实则互为关联，解答入手较宽，步步深入，试题的信度度与区分度都很好．老师在赞叹试题条件简洁但内涵丰富，问题自然并有层次，解法多样又自然，思维开放又严谨的同时，有这样的疑问，这道试题怎么命制？怎么想到这样设置函数？又是如何提出这样有关联并有深度的问题？这样的命题是否有规律或者说有模式？

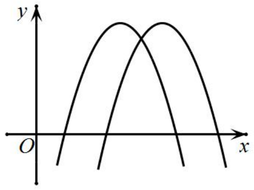
二、命题起源

在福建省蔡德清名师工作室的初中数学命题研修活动有以下的一道命题作业：

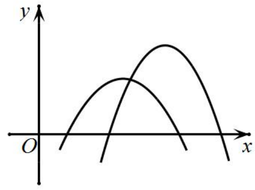
试题位置与难度：压轴题(第 24—25 题)、难度预设：第(1)题 0.4，第(2)题 0.2，第(3)题 0.1(若有第三步)；考查的内容领域：数与代数；考查的能力水平：运用与探索；考查的核心素养(选择)：数学抽象、逻辑推理、数学运算、几何直观、数学建模，重点考查理性思维和数学探究；考查的数学思想(选择)：分类讨论、函数方程、数形结合；考查内容预设：二次函数+二次函数；题干特征预设：两个二次函数可以相同也可以不同，要有参数特征(至少一个参数，不超个 3 个参数)；问题预设：研究参数对图形的影响或考虑对图形(象)进行变换(平移、对称、旋转或其它自己定义的“变换模式”)，研究图形(象)在变换前后的变化；问题设置重点关注函数建模，函数与方程不等式关系，函数的性质与应用等．

命题思路一：以图象平移作为命题出发点，有以下两种基本方式，方式一两个函数开口

大小一样，方式二两个函数开口不一样．



方式一



方式二

对方式二进行特殊化，把两个函数都经过原点，并让两个函数都过原点，从而命制了2016年莆田市中考数学压轴题：

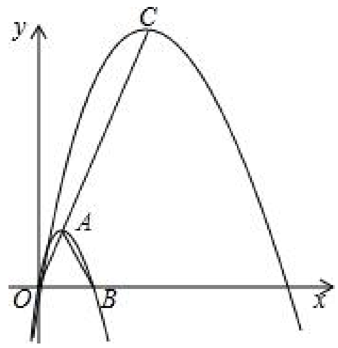
如图，抛物线 C_1： $y=-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$ 的顶点为 A，与 x 轴的正半轴交于点 B．

(1)(3分)将抛物线 C_1 上的点的横坐标和纵坐标都扩大到原来的2倍，求变换后得到的抛物线的解析式；

(2)将抛物线 C_1 上的点$(x，y)$变为$(kx，ky)(|k|>1)$，变换后得到的抛物线记作 C_2．抛物线 C_2 的顶点为 C，点 P 在抛物线 C_2 上，满足 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$，且$\angle ACP=90°$．

①(7分)当 $k>1$ 时，求 k 的值；

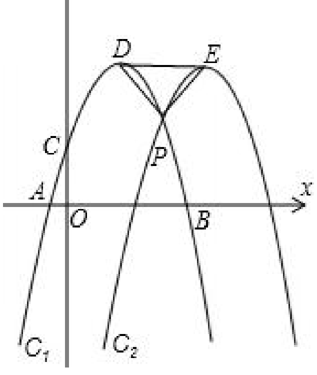
②(2分)当 $k<-1$ 时，请你直接写出 k 的值，不必说明理由．



图中两个“顶点三角形”三角形OAB与三角形OCD相似，可以看做位似抛物线，深挖下去有位似变换的特征．

对方式一， 2011年莆田市的质检试卷压轴题最后一步便以函数平移作为背景，试题如下：

如图，将抛物线 C_1：$y=-x^2+2x+3$ 向右平移 $t(t>0)$个单位长度，得到抛物线 C_2，顶点为 E，抛物线 C_1、C_2 相交于 P 点，设△PDE 的面积为 S，判断 $\dfrac{S}{t^3}$ 是否为定值？请说明理由．



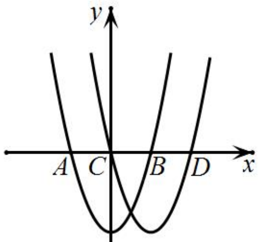
此时抛物线是确定的，变化的只是平移的量．审视这两种方式，考虑平移是图象变换的

基本模式，命题组选择有平移特征的函数，特殊地可以考虑两个函数开口大小与方向一致．

命题思路二：据此理念，查询并发现了一个题根．

试题：试求 a，b，使得函数 $y_1=x^2+ax+b$ 及 $y_2=x^2+bx+a$ 与 x 轴的四个交点中相邻两点的距离相等．

对原题求解时，有 y_1 和 y_2 相交于$(1，a+b+1)$，因此经过“分类讨论”得到符合题意的图象如下，



进一步利用 $AC=BC=BD$，可得 $a=0$，$b=-4$ 或 $a=-4$，$b=0$．本题涉及两个主要特点，一是过定点$(1，a+b+1)$且开口大小相同，因此需要对图象分类讨论；二是与 x 轴交点化归为方程求根，考查数形结合，化归与转化等数学思想方法，考查数学运算、直观想象．

从试题中悟到了命题的一些价值，如两个函数参数关联并互相制约，虽然没有平移但参数的不确定性使得两个函数的图象也在变化，隐含了分类讨论的思想．但参数 a，b 发挥的作用有限，代数思维、代数核心知识还未考查到，作为压轴题分量不足，难以考查区分学生的核心素养水平，于是考虑对两个函数重新设置．

三、尝试成型

1．函数载体的设置

第一稿：对解析式引入变量系数，函数 $y_1=kx^2+ax+b$ 及 $y_2=kx^2+bx+a$ 交于点$(1，a+b+k)$．但考虑定点受多个参数影响，试题难度偏大，且改编力度不够．

第二稿：调整变量系数的位置，考虑函数 $y_1=kx^2+ax+a$ 及 $y_2=kx^2+bx+b$ 交于点$(1，k)$．

2．问题的设置

命题组形成试题的第(1)问：

(1)求证：函数 y_1 与 y_2 的图象交点落在一条定直线上；

考虑抛物线上重要的点：与 x 轴的交点，与 y 轴的交点，顶点、交点等(当然也可以考虑重要的线段或图形)，选择添加适当的条件来限制 a，b 和 k 之间的关系，于是有第(2)问的设问：

(2)若 $AB=CD$，求 a，b 和 k 应满足的关系式；

在第(2)题时已经得到 a，b，k 之间的关系 $a+b=4k$，需要再加两个条件可以求出 a，b，k 或 y_1 和 y_2, 若再加一个条件，只能求出两个参数之间的关系．为保证三问之间内在联系，还是从函数与 x 轴有交点产生的线段之间关系来思考，刚开始时直接添加条件 $AB=BC=CD$，探索 a，b 之间的关系，但该条件较为显性，对分类谈论等思想还未涉及到，对数学运算水平的考查还未达到预期目标，因此，对该条件进行弱化，但结论未必存在，便以存在性题型出现得到．第(3)问如下：

(3)是否存在函数 y_1 和 y_2，使得 B，C 为线段 AD 的三等分点？若存在，求 $\frac{a}{b}$ 的值；若不存在，说明理由．

在解的过程中，体现考查数学运算中的把握运算方向，逻辑推理中的代数推理：若 $k>0$ 时，

又 $a+b=4k$ 且 $ab<0$，整理得 $a^2+b^2-ab=0$，得 $(\frac{a}{b})^2-\frac{a}{b}+1=0$，$\triangle=1-4=-3<0$，

故不存在实数 a，b，使得 B，C 为线段 AD 的三等分点；

当点 C 在点 B 右侧，同理可得 $\frac{a}{b}=-7-4\sqrt{3}$．

对于本题三问之间联系紧密，突出函数载体的核心、有价值内容，问题的设计突出能力立意，核心素养导向，为考生提供了展示创新思维的平台，第(3)题需要考生的逻辑推理、数学运算、数学抽象、直观想象等核心素养达到创新水平，这也是试卷较高区分度的保障．

四、试题拓展

“含参”二次函数的命题关注函数的概念，关注函数的图象和性质，关注函数学习的基本思想与方法，关注代数核心素养．命题的方式在代数方面关注变量系数满足一定的关系式对函数图象和性质的影响，而不仅仅是“引参”的计算，在几何方面关注动态几何图形嵌接于二次函数，该几何图形的性质及变换对二次函数变量系数的影响，继而延伸的函数建模，轨迹等等．

因此，对二次函数解析式引入变量系数，除了研究交点之间的长度外，还可以从图形形状、位置、大小等多角度拓展．

题干：函数 $y_1=kx^2+ax+a$ 的图象与 x 轴交于点 A，B(点 A 在点 B 的左侧)，函数 $y_2=kx^2+bx+b$ 的图象与 x 轴交于点 C，D(点 C 在点 D 的左侧)，其中 $k\neq0$，$a\neq b$．

拓展 1：将 x 轴变换为一般的直线，例如直线 $y=8k$．

函数 $y_1=kx^2+ax+a$ 的图象与直线 $y=k$ 交于点 A，B(点 A 在点 B 的左侧)，函数 $y_2=kx^2+bx+b$ 的图象与直线 $y=k$ 交于点 C，D(点 C 在点 D 的左侧)，其中 $k\neq0$，$a\neq b$．

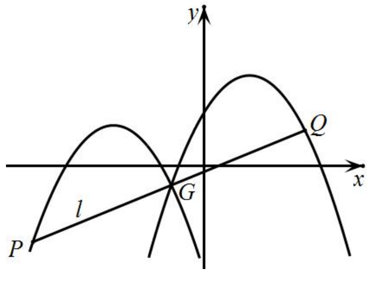
(1)若 $AB=CD$，求 a，b 和 k 应满足的关系式；

(2)是否存在函数 y_1 和 y_2，使得 B，C 为线段 AD 的三等分点？若存在，求 $\frac{a}{b}$ 的值；若不存在，说明理由．

拓展 2：将 x 轴变换为更一般的直线．

函数 $y_1=kx^2+ax+a$ 和 $y_2=kx^2+bx+b$ 的交点为 G，若过点 G 的直线被每一条抛物线截得线段的长度相等，求直线的表达式．

故直线 l 的解析式为 $y=\frac{a+b-4k}{2}(x-1)+k$．



拓展 3：考虑特殊函数的顶点轨迹．

点 E 为函数 $y_1=kx^2+ax+a$ 顶点，点 F 为函数 $y_2=kx^2+bx+b$ 顶点，证明：点 E，F 落在一定抛物线上，并求出该直线的函数解析式(用含 k 表示)．

拓展 4：函数 $y_1=kx^2+ax+a$ 的图象与 x 轴交于点 A，B(点 A 在点 B 的左侧)，函数 $y_2=kx^2+bx+b$ 的图象与 x 轴交于点 C，D(点 C 在点 D 的左侧)，其中 $k\neq0$，$a\neq b$，点 E 为函数 y_1 顶点，点 F 为函数 y_2 顶点．若 $k<0$，$ab<0$，当 $AE\perp DF$ 时，求 a，b，k 之间的数量关系．

(1)可添加条件：当 $ab=-1$ 时，若有两个不同的 k，使得 $AE\perp DF$ 成立，求 a 的取值

范围．

(2)可添加条件：当$a+b=0$时，且$AE\perp DF$成立，求a的取值范围．

拓展5：可以继续考虑一些简单的几何性质：例如：$AE\,//\,DF$时，变量系数a，b，k的关系；$\triangle GBC$为等边三角形时，变量系数a，b，k的关系等．或者与三角形ADP进行联系，因为三角形发生改变影响了二次函数；或者再添加一些特殊的线，如抛物线的对称轴，点E或点F到数轴的距离；或者再添加一些特殊的点，如两条抛物线的交点，从而产生新的图形；或者研究图中相关的线段、角度、或连线得到相关图形的面积、周长等大小的计算与建模．

五、命题反思

1．以二次函数为背景的压轴题的命题思考

(1)载体的选择．二次函数命题的载体常见的有"二次函数+一次函数"，"二次函数+二次函数"，"二次函数+几何(三角形、四边形等)"，"二次函数的实际应用"．特别是载体从单一的抛物线，走向由许多关联的抛物线构成的抛物线群，让两个二次函数叠加、关联、运动、变换，从而打开了这一类型的命题策略．常见的有过定点的抛物线、顶点在定直线上的抛物线、变换(平移、对称、位置、自定义)后的抛物线等．

(2)参数的选择．二次函数含参是未来的命题主流，选择参数一是尽可能要有意义，而不是堆砌的，为含参而含参；是参数的个数要适当控制，一般不超过3个．

(3)问题的选择．二次函数命题中常见的问题有以下：求函数关系式或函数建模，过定点问题，图象变换(函数关系)问题，最值或变量范围问题，函数与方程问题(讨论解的存在性)，函数与不等式问题(不等式恒成立)，函数的实际应用(函数建模、求最值、方案设计)，直线与抛物线关系(交点问题、弦长问题)，函数与几何的综合，高初中衔接问题．

命题要培养学生发现、提出、分析、解决问题的能力，提出有价值有质量的问题，问题是关键，问题是思考的结果，也是深入思考的开始，有问题也是创造的开始，问题的设置要有层次地展开，以探究为特征，渗透探究的方法．

(4)题型的选择．试题常以下列题型出现：

开放型(条件开放、结论开放)：探究型(过程性、存在性)：活动型(操作、猜想)：学习型(新定义、阅读理解)：

2．基于核心素养的命题策略

(1)命题要有整体意识，需要整体把握课程性质，体现数学教育和数学课程的性质；整体把握课程目标：从知识掌握到能力培养再到素养形成，特别是核心素养的达成；整体把握内容结构：考查的内容主线清晰、主题明确、同时是教材中核心内容．

(2)核心素养的命题关注的三个维度：①数学课程内容体系：知识、技能、方法、思想；②数学核心素养：内涵、价值、表现、 水平；③表现形式：情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思，学习过程，发现与提出问题、分析与解决问题过程，学习能力(阅读理解、概括提升) ．

回看含参二次函数为结合点的命题已成为各地市的命题主流，其不拘泥于是单独几何考查或是单独代数考查，立意与体现核心素养导向的命题功能，系数变量则函数图象不定，可考查学生的直观想象和数学抽象，图象上特殊点的简单几何性质，可考查学生化归与转化和逻辑推理，含参算式的建立与求解，可考查学生的代数推理，数学建模和数学运算，实现五大核心素养交互式、综合性、多方位考查评价，同时可根据试题的生成与发展，设置不同的问题，实现多层次、分阶段要求的考查评价，实现素养考查别有天．因此，"函数含参"试题的酝酿与生成，是命题方向上值得研究的，非常有价值的一个领域．

案例3：基于数学文化的初中数学命题的设计

（参阅《福建教育》2017.8）

案例 4：新定义的中考数学试题的命题阐释与思考

（参阅《福建教育》2016.11）

案例 5：基于素养检测的中考数学试卷的内涵表现与目标思考

（参阅《福建教育》2019.8）

建立研修制度，创新教研方式。打破区域限制，从福州、莆田两地教研共享开始，开展以命题为核心的常态研修活动（定时研修），让名师工作室的工作能常态化、制度化、科研化。我们的愿景是建立一支相对稳定的命题研究队伍，让命题工作更加科学、专业、规范；建立一支相对独立的试题评价队伍，能对命题结果进行客观、公正、专业的评价，为未来的命题积累更多的经验与教训。目标是让命题走向公开化、专业化，构建命题与教学之间的良性互动关系，从而让命题能对教学工作起到更好的导向作用。

未来工作室将通过教师的教育阅读、教育课题的理论与实践研究、引领教师的教育论文撰写，从而打造一支科研型的优秀数学教师团队，更好地服务于福建省基础教育。