

函数图象及其性质

一、函数三要素、函数图象

1.(30 届希望杯) 函数 $f(x) = \sqrt{|x+1| - |x-2| - a}$ 的定义域为 \mathbf{R} ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -3)$. B. $(-\infty, -3]$. C. $(-\infty, 3)$. D. $[-3, +\infty)$.

2. (27 届希望杯) 函数 $y = \cos x + \sqrt{-x^2 + 5x + 14}$ 的定义域为_____

3. (30 届希望杯) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ，则 $f(\sqrt{a^2+1}+a) + f(\sqrt{a^2+1}-a)$ 的值是 ()

- A.1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D.2

4. (25 届希望杯) 已知 $y = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & (1 \leq x < 2) \\ x + \frac{16}{x} & (2 \leq x \leq 6) \end{cases}$ ，则 y 的值域是_____.

5. (30 届希望杯) 17. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - ax + b)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称，则函数 $f(x)$ 的值域为_____.

6. (17 届希望杯) 已知 $a \neq 0$ ，函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象关于原点对称的充要条件是 ()

- A. $b = 0$ B. $c = 0$ C. $d = 0$ D. $b = d = 0$

7. (27 届希望杯) 函数 $y = \frac{1+x}{1+x^2}$ 的值域是_____，单调递增区间是_____.

8. (28 届希望杯) 已知函数 $f(n) = k (n \in \mathbf{N}^*)$ ， k 是 0.9196461178... 小数点后的第 n 为数字，则 $5 \underbrace{f(\dots f(f(5)))}_{555 \text{ 个 } f} + 8 \underbrace{f(\dots f(f(8)))}_{888 \text{ 个 } f} = \underline{\hspace{2cm}}$

二、函数四个性质（单调性、奇偶性、周期性、最值）

9. (28 届希望杯) 已知函数 $f(x) = -x|x|$ ，则函数 $f(x)$ 是_____函数（填“奇”或“偶”）；

若 $x_1 + x_2 = 0$ ， $x_2 + x_3 > 0$ ，则 $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ 的取值范围是_____.

10. $F(x) = (1 - \frac{2}{3^x + 1})f(x) (x \neq 0)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 不恒等于 0, 则 $f(x)$ ()
- A. 是奇函数 B. 是偶函数
C. 可能是奇函数, 也可能是偶函数 D 既不是奇函数, 也不是偶函数
11. (28 届希望杯) 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = -f(x + \frac{3}{2})$, 又知 $f(0) = -2, f(1) = 2, f(2) = 3$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2009)$ 的值等于 ()
- A.2009 B.2010 C. 2011 D.2012
12. (28 届希望杯) 设 p : 函数 $f(x) = \lg(10^x + 1) - ax$ 是偶函数, q : 函数 $q(x) = \frac{4^x - 2a}{2^x}$ 是奇函数, 则 p 是 q 的 _____ 条件。
13. (30 届希望杯) 下列四个函数中, 增函数的有 _____ 个
- ① $y = 2^{2x} - 2^{x+1} + 2$; ② $y = 3^{2x} + 3^{x+1} - 3$;
③ $y = \lg(x^2 + 2x - 2)$; ④ $y = \ln(x^2 - 3x) - \ln x$
14. (28 届希望杯) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 在 $[0, 1]$ 单调递减, 且 $f(-x) = f(x) = -f(x+1)$, 则下列不等式中正确的是 ()
- A. $f(\frac{7}{2}) < f(\frac{7}{3}) < f(\frac{7}{5})$. B. $f(\frac{7}{5}) < f(\frac{7}{2}) < f(\frac{7}{3})$.
C. $f(\frac{7}{3}) < f(\frac{7}{2}) < f(\frac{7}{5})$. D. $f(\frac{7}{5}) < f(\frac{7}{3}) < f(\frac{7}{2})$.
15. (27 届希望杯) 已知函数 $f(x) = -x^2 + \cos \frac{x}{2}$, $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]$, 由如下 3 个条件:
① $x_1 > x_2$; ② $x_1^2 > x_2^2$; ③ $|x_1| > x_2$, 其中使 $f(x_1) < f(x_2)$ 恒成立的条件的序号为 _____.
16. (27 届希望杯) 25. 已知 $f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x}, & 0 < x \leq 4. \\ -x^2 + 10x - 20, & x > 4. \end{cases}$. 若存在 $0 < a < b < c < d$, 且 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$, 则 $a + b + c + d$ 的取值范围为 _____, $abcd$ 的取值范围为 _____.

17.(28届希望杯) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(1+x)x, & x \geq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(1-x), & x < 0 \end{cases}$

- (1) 判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 对任意两个实数 x_1, x_2 , 求证: 当 $x_1 + x_2 > 0$ 时 $f(x_1) + f(x_2) > 0$;
- (3) 对任意实数 x , $f(e^{2x} - a) + f(3 - 2e^x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

18. (27届希望杯) 已知 $y = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{9-x^2}$ ($0 < x < 3$), 则 y 的最小值是_____, 此时 $x =$ _____.

三、函数零点问题

19. (30届希望杯) 在平面直角坐标系 xOy 中, 若函数 $y = a|x|$ 与 $y = x + a$ 的图像只有一个交点, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、含参数的不等问题

20. (28届希望杯) If the value range of $f(x) = \lg(ax^2 + 3x + 2)$ is all real number, then the value range of a is ()

- (A) $\left[0, \frac{9}{8}\right]$. (B) $\left[0, \frac{9}{8}\right)$. (C) $\left(\frac{9}{8}, +\infty\right)$. (D) $\left[\frac{9}{8}, +\infty\right)$.

21. (30届希望杯) 函数 $y = x^2 + \frac{9}{x^2 + 1}$ 的最小值是_____.

22. (28届希望杯) 已知 $f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 若 $f(n) < a - 2016$ 对任意 n 恒成立, 则整数 a 的最小值是_____.

23. (25届希望杯) 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ($x \neq 0, a \in R$),

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 当 $x \in [2, +\infty)$ 时, 若 $f(x)$ 是增函数, 求实数 a 的取值范围.