

学会提问

章建跃

(人民教育出版社 课程教材研究所)

一、核心素养立意的课堂教学

- 立德树人→中国学生发展核心素养→“三会”→“四基”、“四能”
- “三会”明确了学生学习数学课程后应达成的正确价值观念、必备品格和关键能力，体现了数学课程教学对全面贯彻党的教育方针、落实立德树人根本任务、发展素质教育的独特育人价值，是核心素养与数学课程教学内在联系的桥梁。同时，在“基于核心素养的数学课程目标体系”中，“四基”“四能”目标是核心素养目标在数学教学中的具体化、细化，是日常教学中落实核心素养目标的出发点和归宿。

课堂教学中立德树人的实现路径

- 基于数学的整体性，以一般观念为统领，以研究一个数学对象的基本套路（背景——概念（本质）——性质（关系、规律）、运算——结构（联系）——应用）为线索，创设符合数学知识发生发展规律和学生思维规律及认知特点的问题串，引导学生开展系列化的数学活动，促使学生经历发现问题和提出问题、分析和解决问题的过程，在获得数学基础知识、基本技能的过程中，领悟基本思想，积累基本活动经验。学生在获得“四基”提升“四能”的过程中，逐步学会用数学眼光观察现实世界，用数学思维思考现实世界，用数学语言表达现实世界。

“两个逻辑”的合理与融合是教好数学的关键

- “两个逻辑”：数学知识的逻辑，学生认知的逻辑；
- 前一个是数学的学科思想问题，后一个是学生的思维规律、认知特点问题。
- 以“事实—概念（本质）—性质（关系、规律）、运算等—结构（联系）—应用”为明线，以“事实—方法—方法论—数学学科本质观”为暗线，并要强调结合明线布暗线，形成基本数学思想和方法的“渗透—明确—应用”的有序进程，使学生在掌握“四基”、发展“四能”的过程中有效发展核心素养。

单元-课时教学设计的重要性

- 教学设计能力是全面提升教师数学课程教材实施能力的关键抓手。通过基于数学学科核心素养目标的“单元—课时”教学设计与实践研究，可以有效地帮助教师在掌握教学设计方法与技能的过程中，提升数学理解水平，提升把握学生认知规律的水平，提升学情分析、情境与问题设计、学习评价以及作业设计等方面的能力，进而提升数学育人能力。

单元整体设计追求什么？

- 数学的整体性
- 逻辑的连贯性
- 思想的一致性
- 方法的普适性
- 思维的系统性

单元-课时教学设计框架

第 n 单元 (k 课时)

- 一、单元内容及其解析 (含单元教学重点)
- 二、单元目标及其解析
- 三、单元教学问题诊断 (含单元教学难点)
- 四、单元教学支持条件

第1课时~第 k 课时

- 1.课时教学内容
- 2.课时教学目标
- 3.课时重点、难点
- 4.教学过程设计

- **课时教学设计前先进行单元教学设计，对本单元内容及其蕴含的数学思想和方法、本单元着重培养的数学学科核心素养、本单元的主要学习难点等作出全面分析，并将课标规定的本单元内容按知识的发生发展过程、学生的认知过程（从概念、原理等的学习到练习再到目标检测等）分解到课时，同时将相应的“内容要求”（即单元目标）分解为课时目标。**

单元-课时教学设计的总体要求

- 内容解析准确到位，目标解析明确、具体，问题诊断切中要害，教学过程设计逻辑连贯、重点突出，注重以数学知识的发生发展过程和学生数学思维过程的融合为线索，创设情境提出问题，使学生在环环相扣的问题串引领下开展系列化的数学学习活动，其中特别强调情境的适切性、问题的高质量，从而形成核心概念的思维建构和技能操作过程、数学基本思想的领悟过程、数学基本活动经验的积累过程，通过这样的教学活动，促使学生在掌握“四基”的过程中落实数学学科核心素养。

二、提升设问水平是提高教学设计质量的关键

- 衡量问题质量的几个基本指标：

- (1) 反映当前内容的本质，特别是内容所蕴含的数学思想和方法；
- (2) 在学生思维最近发展区内；
- (3) 具有可发展性，形成自然而然、环环相扣的问题串；
- (4) 能够启发学生逐步学会自主提问——看过问题三百个，不会解题也会问。

（一）提升问题的数学“含金量”

- 直线的点斜式方程——老师的设计

问题1 已知一点，或已知直线的斜率，能确定一条直线吗？两个条件合在一起呢？

在学生顺利回答“两个条件合在一起能确定一条直线”后，提出

问题2 已知直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$ ，且斜率为 k ，求 l 上不同于 P_0 的任意一点 $P(x, y)$ 的坐标与 x_0, y_0, k 的关系。

- 两个问题都从“事实”层面提出，没有在研究什么、为什么研究以及如何研究等方面提出问题，其思想性不高，思考性不强，导致问题的数学含金量低。

- 课堂引入要通过具有较高统摄性的“情境+问题”，使学生明确研究对象、问题以及解决问题的方法等，进而构建起学习的先行组织者。
- 引导语：前面学习了直线的倾斜角与斜率，知道斜率是倾斜角的代数化。下面我们要利用直角坐标系中确定直线位置的几何要素——一点和一个方向，求出直线的方程，并利用方程解决直线的有关问题。
- 问题1 我们知道，直角坐标系中，给定直线 l 上一点 P_0 及其倾斜角 α 就可以唯一确定这条直线。你能用代数语言解释“唯一确定”的含义吗？
- 追问 设直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0)$ ，斜率为 k ，你认为“求直线 l 的方程”就是要解决什么问题？你能独立解决这个问题吗？

- 设计意图：通过问题1，引导学生用代数语言刻画几何要素，为明确研究对象和要解决的问题做铺垫。“唯一确定”的代数含义是直线 l 上任意一点 P 的坐标 (x, y) 与点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 、斜率 k 之间的关系是唯一确定的。通过追问，使学生明确要解决的问题是利用斜率 k ，建立点 $P(x, y)$ 、点 $P_0(x_0, y_0)$ 之间的联系，得出 x, y 所满足的方程。
- 在完成点斜式的推导后，可通过下面问题引导学生反思：
- 问题2 在推导点斜式时，（1）为什么要“设 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于 $P_0(x_0, y_0)$ 的任意一点”？（2）为什么要说明“直线 l 的方程是 $y - y_0 = k(x - x_0)$ ”、“方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 的直线是 l ”？

(二) 注重连贯性和逻辑必然性

探究二：“直线的斜截式方程”，没有任何铺垫就直接给出如下问题：已知直线 l 的斜率为 k ，与 y 轴的交点为 $(0, b)$ ，求直线 l 的方程。

- 学生利用点斜式方程求出方程 $y=kx+b$ ，再在“高二数学微学案”上通过填空方式明确“截距”“斜截式”等概念，接着重复点斜式方程的教学环节，先安排思考题，针对“截距”、“斜截式方程能否表示平面内的所有直线”进行辨析，并让学生联系一次函数表达式，再安排“典例分析”“变式训练”进行巩固训练。

问题分析

- 没有揭示斜截式方程与点斜式方程之间特殊与一般的关系，孤立地提出问题，学生虽然不费吹灰之力就得出斜截式方程，但并没有从中体验两种形式之间的内在逻辑关联，同时也失去了一次培养发现和提出问题能力的机会。

- 人教A版在这里是这样开头的：“下面我们看点斜式的一种特殊情形：如果斜率为 k 的直线 l 过点 $P_0(0,b)$ ，这时 P_0 是直线 l 与 y 轴的交点……”，这里特别指出了斜截式是点斜式中“点”在 y 轴上时的特例。如果教师能够认真分析教材，理解教材的编写意图，那么就可以在教材的指引下设置问题，启发学生研究“特例”而得出斜截式方程。例如，我们可以这样来引导和提问：
- 研究数学对象时，在得出一般结论后，往往要通过探索“特例”或进行推广来实现对问题更全面更深入的认识。你认为点斜式中的“点”有哪些特殊位置？这时的方程有怎样的特殊形式？

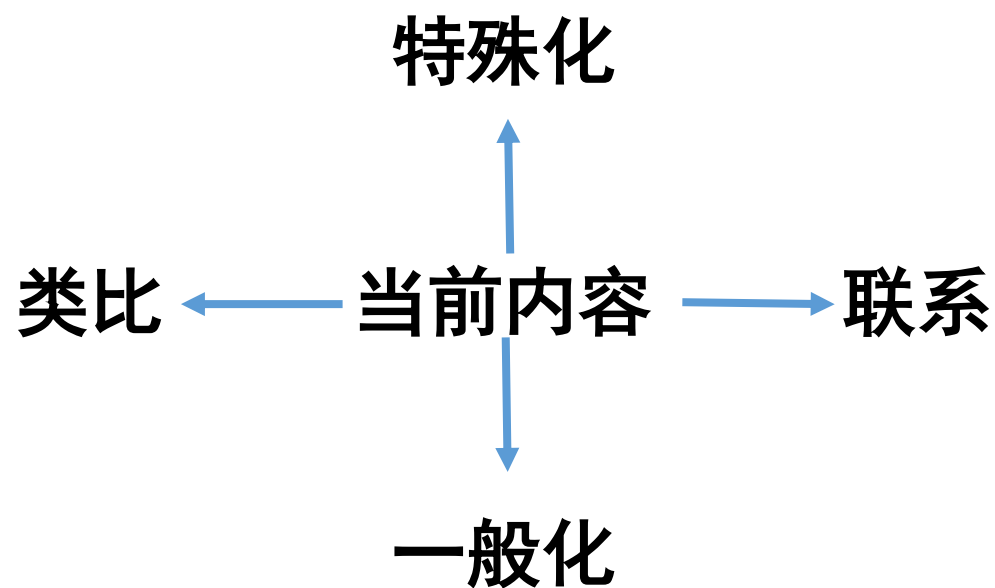
从两点式到截距式

- 我们知道，两点确定一条直线，说明在直角坐标系中，给定两点的坐标就可以求出过这两点的直线方程。你能利用点斜式方程求出过两点的直线方程吗？你认为给定的两点有哪些特殊位置？

直线与方程的整体架构

- 人教A版在得出直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程后指出，这些方程“都有明确的几何意义，都涉及确定直线位置的两个基本要素：两个点或一点和斜率。这些直线的方程，形式不同但本质一致，都是对直线的定量刻画。在对直线的定量刻画中，斜率处于核心地位。点斜式方程是其他方程的基础，其他方程都是点斜式方程在一定条件下的变式。”

- 数学对象就是一个系统，数学对象的组成元素就是这个系统的要素，要素之间的基本关系决定了对象的一般特性，而要素的某些特殊形式、特殊关系往往反映了对对象的重要特性。这样，在抽象数学对象要素及其基本关系的基础上，依着一般与特殊及其相互转化的思路探索数学对象的各种性质，乃是数学研究的基本之道。用一个数学思维逻辑图来表示，就是



• 在直线的方程这个系统中，要解决的基本问题是“在平面直角坐标系中，由确定直线的几何要素求直线的方程”，研究的途径是：

（1）以“一点和一个方向确定一条直线”为出发点，得出点斜式方程，这个方程可以作为一个定理来看待；

（2）研究点斜式的特例，得出斜截式；

（3）建立“两点确定一条直线”与“一点和一个方向确定一条直线”的联系，用点斜式推出两点式；

（4）研究两点式的特例，得出截距式；

（5）归纳各种条件下直线方程的共性，得出一般式直线方程，指明直角坐标系下二元一次方程（数）与直线（形）之间的一一对应性。

从定义出发探索性质——三角公式的探究

1.终边相同的同名三角函数的关系

由三角函数的定义，可以知道：终边相同的角的同一三角函数的值相等.

由此得到一组公式（公式一）：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \sin \alpha, \\ \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \cos \alpha, \\ \tan(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \tan \alpha, \\ \text{其中 } k &\in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

由公式一可知，三角函数值有“周而复始”的变化规律，即角 α 的终边每绕原点旋转一周，函数值将重复出现.

蕴含的数学思想

- 从定义出发研究性质，体现数学性质的层次性。
- 由三角函数的对应关系可知，角 α 的三角函数值由 α 的终边与单位圆的交点唯一确定，角的终边相同，其同名三角函数值自然相等。

2.同角三角函数的基本关系式

- 直接从定义出发，并与公式一比较，考察函数之间的关系，注意数形结合，代数关系的转化。

探究

公式一表明终边相同的角的同一三角函数值相等，那么，终边相同的角的三个三角函数值之间是否也有某种关系呢？

因为三个三角函数值都是由角的终边与单位圆交点所唯一确定的，所以终边相同的角的三个三角函数值一定有内在联系，由公式一可知，我们不妨讨论同一个角的三个三角函数值之间的关系。

- 蕴含的思想是：相同背景下的不同数学对象之间应该具有内在联系，通过确定这些对象的要素就可以作出发现。其实，探究这种联系就是数学研究的主要任务之一。

3.诱导公式

- 单位圆特殊对称性的解析表示。
- 以直角坐标系为基准，由角的终边的特殊对称性所反映的三角函数的性质：
- 关于原点对称的点的坐标间关系——关于 $\pi+\alpha$ 的诱导公式；
- 关于y轴对称的点的坐标间关系——关于 $\pi-\alpha$ 的诱导公式；
- 关于x轴对称的点的坐标间关系——关于 $-\alpha$ 的诱导公式；
- 关于 $y=x$ 对称的点的坐标间关系——关于 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的诱导公式；
- 等等。

前面利用圆的几何性质，得到了同角三角函数之间的基本关系. 我们知道，圆的最重要的性质是对称性，而对称性（如奇偶性）也是函数的重要性质. 由此想到，可以利用圆的对称性，研究三角函数的对称性.

探究1

如图 5.3-1，在直角坐标系内，设任意角 α 的终边与单位圆交于点 P_1 .

(1) 作 P_1 关于原点的对称点 P_2 ，以 OP_2 为终边的角 β 与角 α 有什么关系？角 β ， α 的三角函数数值之间有什么关系？

(2) 如果作 P_1 关于 x 轴（或 y 轴）的对称点 P_3 （或 P_4 ），那么又可以得到什么结论？

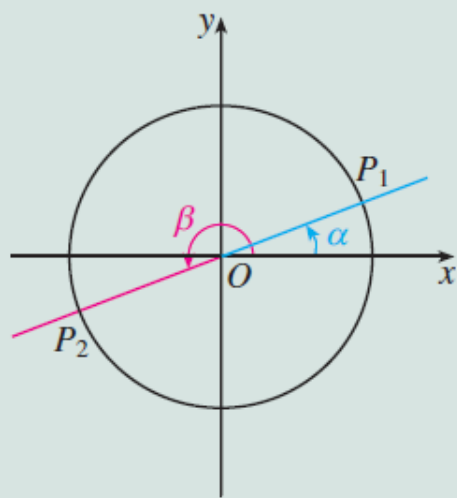


图 5.3-1

4.三角恒等变换公式

- 三角恒等变换公式的本质是圆的**旋转对称性**的解析表示。
- 旋转对称性是圆的最重要特性——三角恒等变换是单位圆旋转对称性的解析表示，是旋转任意角的诱导公式。
- 从旋转变换的观点看：角 α 的终边，旋转整数周 $(k \cdot 2\pi + \alpha)$ ——旋转特殊角 $(\pi \pm \alpha, \frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ ——旋转任意角 β $(\beta + \alpha)$
- 三角恒等变换公式：代数变换的过程与几何解释相结合。

前面我们学习了诱导公式，利用它们对三角函数式进行恒等变形，可以达到化简、求值或证明的目的. 这种利用公式对三角函数式进行的恒等变形就是三角恒等变换. 观察诱导公式，可以发现它们都是特殊角与任意角 α 的和（或差）的三角函数与这个任意角 α 的三角函数的恒等关系. 如果把特殊角换为任意角 β ，那么任意角 α 与 β 的和（或差）的三角函数与 α ， β 的三角函数会有什么关系呢？下面来研究这个问题.



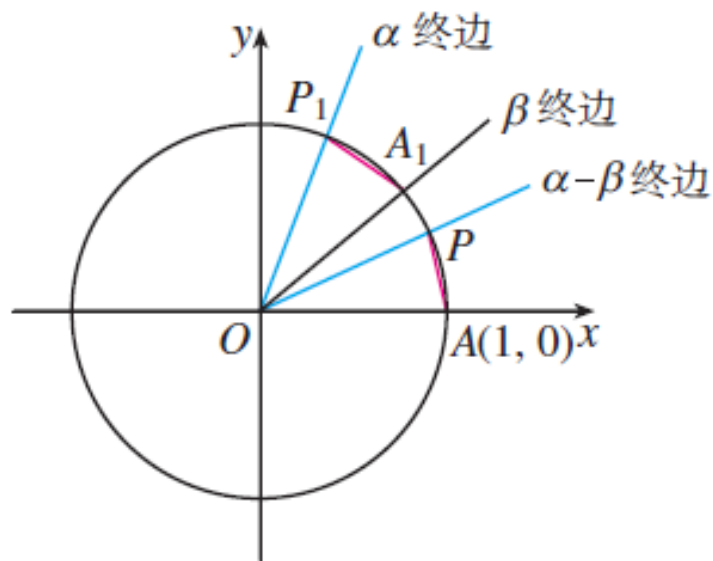
探究

如果已知任意角 α , β 的正弦、余弦, 能由此推出 $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ 的正弦、余弦吗?

下面, 我们来探究 $\cos(\alpha - \beta)$ 与角 α , β 的正弦、余弦之间的关系.

不妨令 $\alpha \neq 2k\pi + \beta$, $k \in \mathbf{Z}$.

如图 5.5-1, 设单位圆与 x 轴的正半轴相交于点 $A(1, 0)$, 以 x 轴非负半轴为始边作角 α , β , $\alpha - \beta$, 它们的终边分别与单位圆相交于点 $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $A_1(\cos \beta, \sin \beta)$, $P(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$.



整体结构、一般观念

- 三角函数是关于圆的解析几何；
- 三角函数的性质乃是圆的各种几何性质的解析表示；
- 三角变换公式是圆的各种对称性的解析表示；
- 从定义出发，以单位圆为脚手架，遵循从特殊到一般的思路，就可以推导出所有公式。

（三）适应学生认知水平，形成适度的思维挑战性

- 并不是任何问题都能激发学生有意义学习心向，也不是随便地给个背景提个问题就算创设了问题情境。对学生而言，只有在自己思维最近发展区内的那些问题才是有意义的，才能形成思维的挑战性。那些不需努力就能回答或再怎么努力也不能回答的问题，也就是与学生认知水平不适应的问题，不能达到挑战学生思维的目的。可以非常肯定地说，与学生认知水平不适应的问题是无效问题，然而课堂中却充满着这样的问题。**

- 直线的点斜式方程后，教师提出如下问题：
 - (1) x 轴、 y 轴的方程分别是什么？
 - (2) 经过 $P_0(x_0, y_0)$ 且平行于 x 轴（即垂直于 y 轴）的直线方程是什么？
 - (3) 经过 $P_0(x_0, y_0)$ 且平行于 y 轴（即垂直于 x 轴）的直线方程是什么？
 - (4) 能否用点斜式表示平面上的所有直线？
- 在得出斜截式方程后，教师又提出如下问题：
 - (1) 截距是距离吗？
 - (2) 直线的斜截式方程能不能表示平面上的所有直线？
 - (3) 直线的斜截式方程与我们学过的一次函数表达式比较你会得出什么结论？

- 分析教师的上述提问可以发现，教师的意图是让学生关注特例，实际上是以直线的斜率为标准对点斜式方程进行分类。在获得一个对象后，通过分类、讨论特例等有利于学生更细致而深入地认识对象，这是学习过程中的必要一环，但我们要考虑如何使学生掌握这种研究方法，而不仅仅是让学生被动执行一个程序指令，这样才能使学生在独立面对一个数学对象时自觉地进行分类、研究特例等活动。

改变提问方式

- 研究一个数学对象的过程中，在得出一般结论后，往往要通过讨论特殊情况来达到深化认识的目的。对于点斜式方程中的参数 x_0 , y_0 , k , 你认为有哪些特殊情况？
- 这样设问，是在知识的发生发展过程中提问，具有问题的必然性，渗透了研究一个数学对象的基本套路，在指明思想方法的过程中体现了“如何研究”的引导，而且给学生留出了适当的独立思考、自主探究空间。

- 学生可以根据问题的提示，自己提出各种可能的特殊情况。例如：
 - (1) $x_0=y_0=k=0$;
 - (2) $k=0, x_0 \in \mathbf{R}, y_0 \neq 0$;
 - (3) $k \neq 0, x_0 \in \mathbf{R}, y_0 \in \mathbf{R}$;
 - (4) k 不存在。
- 由此也就自然得到，与 y 轴平行或重合的直线不存在点斜式方程。

从宏观到微观逐步具体化的方式提问，开始时不要提过于直接的问题

- “正方体的截面问题” 数学探究活动课：

问题1 几何学的研究对象是几何图形。具体而言，我们研究图形的什么？（形状、大小、位置关系等）

问题2 一个平面截正方体，截出的都是平面图形。这些平面图形有哪些形状？（三角形、四边形、五边形、六边形）

追问：为什么不可以截出七边形？（平面与正方体的棱最多有6个交点）

问题3 对于截出的三角形，你想研究什么问题？（三角形的形状、大小）

问题4 通过直观观察可以发现，截出的三角形只能是锐角三角形，你能证明吗？

追问1 平面在什么位置时截出等腰三角形？等边三角形？

追问2 截面三角形的最大面积是多少？

问题5 你能仿照截面三角形的研究过程，自己研究平面截出的四边形、五边形、六边形吗？

（四）加强思想方法的启发性

- 数学的公理、概念、定理、公式、法则等之中蕴含着数学思想，体现着数学的思维方式，也包含了用数学的方式处理问题的基本方法。如果我们的提问仅仅关注知识的事实层面或囿于形式化表达，不对“内容所反映的数学思想和方法”进行深入挖掘，那么这样的教学一定只能是缺乏思想性、没有思维的深刻性和独创性的教学。

- 人教A版在“直线的一般式方程”的开头提出：“观察直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程，我们发现，它们都是关于 x , y 的二元一次方程。直线与二元一次方程是否都有这种关系？下面我们探讨这个问题。”接着提出“思考”：

- (1) 平面直角坐标系中的任意一条直线都可以用一个关于 x , y 的二元一次方程表示吗？

- (2) 任意一个关于 x , y 的二元一次方程都表示一条直线吗？

- 这个设计有点直白。

- 如何基于教科书的设计创设问题呢？我想，无非就是“三个理解”的落实：
- 首先，从数学上厘清点斜式、斜截式、两点式、截距式与一般式之间特殊与一般的关系。直线方程的特殊形式使其具有了明确的、特别的几何意义，但同时也赋予了某些特殊条件，从而使其失去了普适性；直线方程的一般式使其具有了普遍意义，但同时又失去了明确的几何意义。
- 其次，以研究一个数学对象（问题）的一般性思维过程为指引，从数学思维过程的基本框架入手创设问题情境，引领学生的数学思维活动，这就是“理解学生”。思维过程的基本框架是：（1）观察与实验，（2）归纳与演绎，（3）比较与分类，（4）分析与综合，（5）抽象与概括。

- 第三，融合数学的逻辑与学生思维的逻辑设计教学过程，这就是“理解教学”。从特殊到一般要经历如下过程：

- （1）观察点斜式、斜截式、两点式、截距式，并分析各方程的组成要素；

- （2）通过比较得出相同点和相异点，即它们都是二元一次方程，它们的表达形式不同，字母系数（参数）有不同的几何意义；

- （3）通过归纳、抽象与概括，得到直线与二元一次方程之间的本质关系，形成一般性结论，即“直角坐标系中，任意一个二元一次方程都表示一条直线，任意一条直线都可以用一个二元一次方程表示”；

- （4）通过演绎，对“直线的方程”、“方程的直线”进行代数推理，得出确定性结论。

问题1 我们知道，直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程都有特殊的几何意义，都是直线与直角坐标系有某种特殊关系时的特殊形式。请你列举这些方程，再从方程的组成要素进行观察，你能发现它们的共性吗？由此你能想到什么问题？猜想出什么结论？

问题2 类比点斜式的研究方法，你将如何证明猜想的正确性？

追问1 对于平面直角坐标系中的任意一条直线 l ，根据前面求直线方程的经验，我们应该分几类情况得出它的方程？这些方程都是二元一次方程吗？

追问2 反之，对于任意一个二元一次方程 $Ax + By + C = 0$ （ A, B 不同时为0），如果将它转化为直线方程的某种形式，那么就获得了证明。如何转化？

（五）以“一般观念”统领全局

- **一般观念是对内容及其反映的数学思想和方法的进一步提炼和概括，是对数学对象的定义方式、几何性质指什么、代数性质指什么、函数性质指什么、概率性质指什么等问题的一般性回答，是研究数学对象的方法论，对学生学会用数学的方式对事物进行观察、思考、分析以及发现和提出数学问题等都具有指路明灯的作用。**

例1 空间中点、直线和平面的向量表示

教师设计的问题串

问题1 点、直线和平面是构成空间几何体的基本元素。为了用向量方法解决立体几何问题，我们需要先用空间向量表示空间中的基本元素，那么如何用向量表示空间中的一个点 P ？

【师生活动】学生先思考、后回答，教师总结：在空间中，选一定点 O 作为基点，那么空间中任意一点 P ，就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量。

问题2 空间中给定一个点和一个方向就能唯一确定一条直线 l ，如何用向量表示空间中的直线 l ？

问题3 如何用向量表示空间中的平面 α ？

追问1 取两条相交直线的方向向量为 a, b ，如何表示平面 α ？

追问2 如何用向量表示空间中的平面 ABC ？

追问3 能否用一个向量表示空间中的平面？

存在的问题

- 这些问题零散，不自然，缺乏灵动，没有灵魂，问题之间没有关联，没有“用空间向量表示空间基本图形”的数学思想，没有“如何表示”的一般观念，因而没有发现和提出问题的必然性。

用空间向量表示空间基本图形的一般观念是什么？

- 将所有表示放在一起看，你有什么发现？

(1) 对空间任意一点 P ，向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量；

(2) a 是直线 l 的方向向量，在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB}=a$ ，设 P 是直线 l 上的任意一点， $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+ta$ 、 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ 都是空间直线的向量表示式；

(3) 设 A ， B ， C 三点不共线， P 是平面 ABC 上任意一点， $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 称为空间平面 ABC 的向量表示式；

(4) 给定空间向量 a ，过 O 且垂直于 a 的平面唯一确定，其向量表达式是 $a \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ ， a 称为平面的法向量。

利用空间向量表示点、直线、平面，就是将平面几何、立体几何初步中关于确定点、直线、平面的条件“向量化”，其中的基本思想是取定空间一点 O 作为基准点，再利用向量集大小与方向于一身的特征，发挥方向的作用，通过向量运算得到空间点、直线、平面的向量表示式。因此：

用空间向量表示空间基本图形的一般观念是：取定空间一点 O 为基准点，发挥方向的作用，通过向量运算得到向量表示式。

- 问题1 类比用平面向量解决平面几何问题，你认为用空间向量解决立体几何问题时，首先要做什么？
- 问题2 我们知道，空间直角坐标系中的点可以用坐标唯一表示。你能类比空间直角坐标系的建立过程，给出用空间向量表示空间中点的方法吗？
- 师生活动 学生独立思考、作答，教师帮助总结：在空间中选一定点 O 作为基点，那么空间中任意一点 P ，就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示。向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量。
- 教师讲解：位置是几何最原始、基本的概念。几何学中把位置抽象为点。要表示位置需要有基点，确定了基点，将空间向量的始点都平移到基点，空间向量就与空间的点一一对应了。这个思想与建立空间直角坐标系的思想完全类似，其中的原点就是基准点。

- 问题3 空间中给定一个点和一个方向就能唯一确定一条直线 l ，你能将空间中确定直线 l 的这组条件转化为向量表示吗？
- 取定空间中的一点 O 为基点，可以得到点 P 在直线 l 上的充要条件是：存在实数 t ，使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\mathbf{a}$ 。将 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ 代入，得 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ 。两式都称为空间直线的向量表示式， $\mathbf{a}$ 叫做直线 l 的方向向量。
- 教师提醒：点 A 与向量 $\mathbf{a}$ 不仅能确定直线 l 的位置，还可以表示出直线 l 上的任意一点。在空间任取一点 O 作为基准点可以给解决问题带来方便，这是需要重视的一种思想方法。

- 问题4 我们知道，三个不共线的点、两条相交直线或两条平行直线都能确定一个平面，类比空间直线的向量表示，你能将上述确定一个平面的条件转化为向量表示吗？
- 问题5 我们发现，以上平面的向量表示本质上都是利用平面向量基本定理。你能类比空间直线的向量表示式，得到空间平面的向量表示式吗？
- 追问1 我们知道，给定空间一点 O 和一个向量 a ，那么过点 O 且以 a 为方向向量的直线唯一确定。以点 O 和向量 a 能确定一个平面吗？如果能，请你写出它的向量表示式。
- 追问2 给定一个平面，该平面的法向量唯一吗？请画图分析。

例2 等比数列与等差数列的类比

- 怎样的类比才能启迪学生的思想？
- 教师的“类比性提问”：
- 类比问题1 我们已经得到等差数列的定义，请同学们思考一下，根据等差数列的定义，我们能够联想到什么？
- 分析：这是一个没有数学思想的问题，思考的“方向感”不强，学生很难从中体验发现和提出数学问题的方法。

如何改进？

- 单元起始问题很重要。
- 通过类比要解决两个问题：一是发现研究对象，二是建立研究框架。问题中要蕴含如何发现数学新对象的方法，这就需要发挥一般观念的引领作用；要注重引导学生类比等差数列的研究经验，建构研究等比数列的整体架构。

问题1 前面我们通过减法运算发现了一类数列中蕴含的“差相等”规律，得到了有重要应用价值的等差数列。类似的，你认为还可以通过怎样的运算得到其他值得研究的数列？

追问 类比等差数列的学习过程，你认为可以按怎样的路径研究等比数列？

事实—概念—通项公式—性质—前 n 项和—应用

- 类比问题2 通过叠加法可以得到等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，并且还得到它的推广公式 $a_n = a_m + (n-m)d$ ，同学们能不能推导等比数列的通项公式和类似的推广公式呢？
- 存在的问题：这个问题也是没有思想的，并且在字里行间透出“玩花样”的味道。
- 这里，通过类比要解决的问题也是两个，一是明确等比数列通项公式的本质，二是获得推导公式的方法。等差数列通项公式的本质是以要素 a_1 ， d （常量）为媒介的 a_n 与序号 n 的函数关系，推导通项公式的方法首倡从定义出发的归纳法。

- 问题2 我们知道，等差数列通项公式本质上是利用要素 a_1 ， d 建立的 a_n 与序号 n 之间的函数关系。类似的，你认为等比数列通项公式的本质是什么？
- 在学生回答出“本质是利用要素 a_1 ， q 建立的 a_n 与序号 n 之间的函数关系”后，追问：
- 类比等差数列通项公式的归纳过程，你能利用等比数列的定义归纳出它的通项公式吗？
- 说明：归纳是代数学的根本大法，从定义出发归纳通项公式的过程是程序化的，有章可循，比较自然。通项公式要强调用基本量表达规律的思想，“推广公式”不是基本的，不应占用课堂时间，可以作为课外拓展的问题。

- 类比问题4 等差中项及其相关结论比较容易理解，同学们能不能就此研究等比中项及其相关结论呢？
- 类比问题5 我们已经归纳并证明了结论：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 。类似的，还能得到什么结论呢？
- 分析：这是研究数列性质的问题。因为对“什么是数列的性质”和“如何发现性质”等缺乏思考，所以这些问题既没有思想也不连贯，而且颇有强加于人的嫌疑。

以“数列的性质是指数列的项与项之间的关系”（一般观念）为统领的提问：

问题3 有了等比数列的定义、通项公式后，下面要利用这些知识研究等比数列的性质。梳理等差数列的性质，你认为等差数列的性质所研究的问题是什么？

追问1 类比等差数列性质，你认为可以研究等比数列的哪些性质？

追问2 你认为等比数列中，与等差中项对应的概念是什么？可以得到什么结论？

探究可得：对应的概念是等比中项。如果 a ， G ， b 成等比数列，则 $G^2=ab$ ，可知并不是任意两个数都有等比中项。

追问3 已知 a_k ($k > 1$) 是等比数列 $\{a_n\}$ 中的一项, a_k 可以是 $\{a_n\}$ 中哪些项的等比中项?

探究可得: $\{a_n\}$ 中与 a_k “等距离” 的两项都以 a_k 为等比中项。

追问4 从追问3的解答中你能得出其他结论吗?

探究可得: 由 “等距离” 可知, 当 $m + n = p + q$ 时, 有 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ 。

“类比”的要义

- 类比，不能浮于表面形式，必须触及内容本质、内在思想，以有数学含金量的问题引导思考。如果类比中没有整体构架，缺乏一般观念，停留于模仿，则必定所及不远，终究不能给学生以智慧启迪，基本思想、基本活动经验无法落实，发现和提出数学问题的能力也难以提高，学生“三会”的发展必然受到限制。

**研究对象在变，
“研究套路” 不变，
思想方法不变！**

- 这就是类比中蕴含的数学基本思想、数学基本活动经验的力量！**

结束语

数学育人——使学生在数学学习中
树立自信，坚定正念，
增强定力，激励精进，
启迪智慧，净化心灵。



**谢谢倾听
请提宝贵意见**